

俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020
大學指考

甲子(1)：數列極限

觀念篇

(1) 收斂：

無窮數列 $\{a_n\}$ ，當項數 n 愈來愈大，數列 $\{a_n\}$ 會非常接近（趨近）於某一定數 α ，則稱此種數列為收斂數列。

定數 α 稱為此數列的極限，記為 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 。

其中符號“ \rightarrow ”代表趨近或逼近，符號“ ∞ ”代表無限大。

(2) 發散：

若無窮數列 $\{a_n\}$ ，當項數 n 愈來愈大，數列 $\{a_n\}$ 的值不會趨近於一定數，則稱此種數列為發散數列，此時數列 $\{a_n\}$ 的極限不存在。

(3) 柯西的定義：

Let L be a real number.

The statement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = L$$

means that for each

$$\varepsilon > 0$$

there exists a

$$n_0 > 0$$

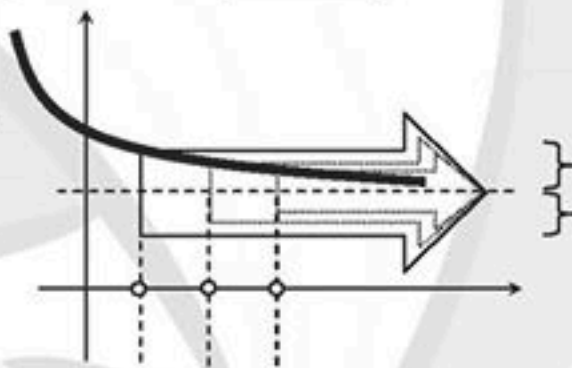
such that if

$$n > n_0$$

,

then

$$|a_n - L| < \varepsilon$$



所謂「趨近」，根據柯西的定義是說 $|a_n - L|$ 可以「任意的小」。

亦即： $|a_n - L| < \varepsilon$ ，其中「 ε 為任意小的正數」。

對於一個數列，我們必可找到第 n 項起，就讓 $|a_n - L|$ 小於該任意小的 ε 。

(4) 數列極限的四則運算：

若數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ，則

數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ 亦為收斂數列，且其極限為 $\alpha + \beta$ 。

數列 $\langle a_n - b_n \rangle$ 亦為收斂數列，且其極限為 $\alpha - \beta$ 。

數列 $\langle a_n \times b_n \rangle$ 亦為收斂數列，且其極限為 $\alpha \times \beta$ 。

數列 $\langle a_n \div b_n \rangle$ 亦為收斂數列，且其極限為 $\alpha \div \beta$ 。當然 $b_n \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ 。

(5)

數列 \ 斂散性	和、差	積	商
兩收斂數列	收斂	收斂	收斂 (分母極限 $\neq 0$)
一收斂、一發散數列	發散	收斂或發散	收斂或發散
兩發散數列	收斂或發散	收斂或發散	收斂或發散

(6) n 在分母型： $f(x)$ 、 $g(x)$ 均為多項函數， $\left\langle \frac{g(x)}{f(x)} \right\rangle$ 的斂散規則為

當 $\deg g(x) > \deg f(x)$ ，數列發散。

當 $\deg g(x) < \deg f(x)$ ，數列收斂，極限為 0。

當 $\deg g(x) = \deg f(x)$ ，數列收斂，極限為 $f(x)$ 、 $g(x)$ 領導係數比。

例題篇：鑑往之傾向

1. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，

T_n 為平面上以直線 $y = \frac{-1}{2n}x + 3$ ，以及 x 軸、 y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），

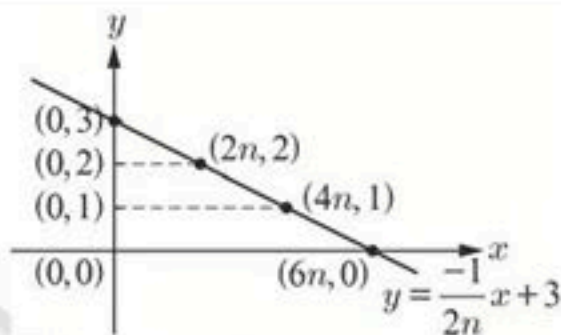
而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【106 年指考數甲】

答：12

解： $\left. \begin{array}{l} x \text{ 截距 } 6n \\ y \text{ 截距 } 3 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow a_n = \underbrace{1}_{y=3} + \underbrace{2n+1}_{y=2} + \underbrace{4n+1}_{y=1} + \underbrace{6n+1}_{y=0} = 12n + 4,$$

$$\text{所求} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n+4}{n} = 12$$



2. 當 n 為正整數時，令 $x = a_n$ 、 $y = b_n$ 、 $z = c_n$ 為三元一次聯立方程組
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -2nx + ny + 3z = 8n \end{cases}$$
 之唯一解，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 【99 年指考數甲】

答：-2

$$\text{解：} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2n & n & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4n, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 8n & n & 3 \end{vmatrix} = 8n$$

由「克拉瑪法則」知：三元一次聯立方程組「恰一組解」時，

$$x = a_n = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8n}{3-4n}, \quad \text{則 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{3-4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\frac{3}{n}-4} = \frac{8}{0-4} = -2$$

3. 一盒子裡有 n ($n > 3$) 顆大小相同的球，

其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、 n 分及 1 分。

若所得分數的期望值為 E_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【104 年指考數甲】

答：15

解：

事件	1 白	1 藍	1 紅
機率	$\frac{n-3}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$
得分	1	n	$2n$

$$E_n = \left(\frac{n-3+2n+2n}{n} \right) \times 3 = \frac{15n-9}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n-9}{n} = 15$$

4. 設 n 為正整數，座標平面上有一等腰三角形，

它的三個頂點分別是 $(0, 2)$ 、 $(\frac{1}{n}, 0)$ 、 $(-\frac{1}{n}, 0)$ ，

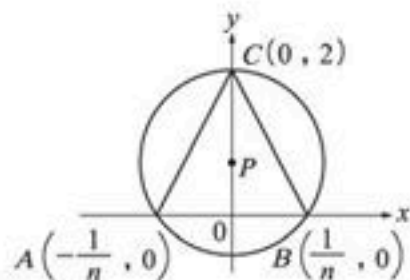
假設此三角形的外接圓直徑長度等於 D_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n =$ _____

【91年指考數甲】

答：2

解：直角 $\triangle POB$ 中：
$$\left(\frac{D_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(2 - \frac{D_n}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow D_n = 2 + \frac{1}{2n^2}, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 2$$



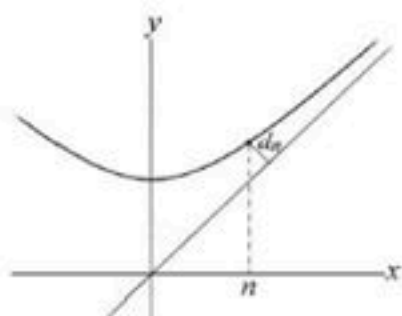
5. 考慮雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 圖形的上半部

(如右圖)，取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y = x$ 的距離，記為 d_n 。

其中 n 為正整數。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) =$

_____。

【94年指考數甲】



解：雙曲線 $y^2 - x^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 + 1}$ ，依題意取正，則 $P(n, \sqrt{n^2 + 1})$

$$P \text{ 到 } y = x \text{ 距離 } d_n = \frac{|n - \sqrt{n^2 + 1}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{n^2 + 1} + n)}$$

$$\begin{aligned} \text{則 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot d_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2}(\sqrt{n^2 + 1} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(2)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

6. 設 n 為正整數，方程式 $x^2 - 2x - n = 0$ 的兩根為 a_n 與 b_n ，且 $a_n > b_n$ 。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_n > 0$ 對所有 n 皆成立 (2) $a_n + b_n = 2$ 對所有 n 皆成立

(3) $b_{n+1} > b_n$ 對所有 n 皆成立 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{n} = 1$ (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{\sqrt{n}} = 2$

【97年指考數甲】

答：(1)(2)(4)(5)

解： $x^2 - 2x - n = 0 \xrightarrow{\text{公式解}} x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4n}}{2} = 1 \pm \sqrt{n+1}$

$\therefore a_n = 1 + \sqrt{n+1} \cdot b_n = 1 - \sqrt{n+1}$

(1) $a_n = 1 + \sqrt{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $a_n + b_n = 1 + \sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{n+1} = 2$

(3) $b_{n+1} = 1 - \sqrt{n+2} < 1 - \sqrt{n+1} = b_n$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 + \sqrt{n+1}] \cdot [1 + \sqrt{n+2}]}{n}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 + \sqrt{n+1}] \cdot [1 + \sqrt{n+2}]}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right]}{1}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[0 + \sqrt{1+0}] \cdot [0 + \sqrt{1+0}]}{1} = 1$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 + \sqrt{n+1}] - [1 - \sqrt{n+1}]}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 2$

7. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n ， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，試選出正確的選項。

(1) 對所有的正整數 n ， $a_n > 3$ 均成立

(2) 存在正整數，使得 $a_{n+1} > 4$

(3) 對所有的正整數 n ， $b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 4$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 。

【108 數甲】

答：(3)(4)

解：(1) 錯，反例： $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n}{n+1} \right\rangle$ ，為嚴格遞增數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，

但 $a_1 = 2 < 3$ 、 $a_2 = \frac{8}{3} < 3$

(2) 錯，因 $\langle a_n \rangle$ 為嚴格遞增數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，

表 4 為 $\langle a_n \rangle$ 上界，故 $a_{n+1} > 4$ 不成立

(3) 對， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 且 $a_{n+1} < b_{n+1}^2 < a_{n+2}$

(4) 對，因 $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ ，又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 4$ ，

由夾擠定理得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 4$

(5) 錯，反例： $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n}{n+1} \right\rangle$ ，則 $\underbrace{\frac{4n}{n+1}}_{a_n} < \underbrace{\frac{4n^2+8n+2}{n^2+3n+2}}_{b_n^2 = \frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})} < \underbrace{\frac{4n+4}{n+2}}_{a_{n+1}}$

表 $\langle b_n \rangle = \left\langle (-1)^n \sqrt{\frac{4n^2+8n+2}{n^2+3n+2}} \right\rangle$ ，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 為發散



例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. $S_n = 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot 1$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{1}{6}$

2. 已知 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 均為公差不為 0 的等差數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ ，

k 為一定實數，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{nb_{2n}} = ?$

答： $\frac{k}{4}$

3. 設 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 5n^2$ ，對所有自然數 n 均成立。

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}} - \sqrt{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}} \right)$ 之值。

答： $\frac{\sqrt{10}}{2}$

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n - 2}{5a_n + 1} = 2$ ，求 $\langle a_n \rangle$ 極限值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $-\frac{2}{3}$

5. 下列關於各選項極限值的敘述，哪些是存在且等於 $\frac{1}{2}$ ？

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{1+4+9+\dots+n^2}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ 。

答： (2)(3)