俞克斌杯杯的

甲子玄機

For 2020 大學指考

乙丑(2)：無窮級數

觀念篇

(1) 無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的求值步驟：

先求前 n 項部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，再考慮 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 的收斂與發散。

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$，則稱無窮級數為收斂，且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，則稱無窮級數為發散，且無窮級數的值不存在。

(2) 等比數列 $\left\langle ar^{k-1} \right\rangle$，首項 a，公比 r，其中 $ar \neq 0$，前 n 項部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$

當 $|r|<1$，基於 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$，使 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，則無窮等比級數 $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \dfrac{a}{1-r}$

當 $|r| \geq 1$，基於 $\lim_{n\to\infty} r^n$ 不存在，使 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，則無窮等比級數 $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ 發散

(3) 注意：無窮等比數列收斂的充要條件為 $|r|<1$ 或 $r=1$

無窮等比級數收斂的充要條件為 $|r|<1$。

(4) 循環小數，也可以藉無窮等比級數觀點求其和：

$$0.\overline{32} = 0.32 + 0.0032 + 0.000032 + \cdots = \frac{0.32}{1-0.01} = \frac{32}{99}$$

$$0.3\overline{14} = 0.3 + 0.014 + 0.00014 + 0.0000014 + \cdots = 0.3 + \frac{0.014}{1-0.01} = \frac{314-3}{990}$$

俞克斌數學

例題篇：鑑往之傾向

1. 請選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^n=0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n=0$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3^n}{6^n+7^n}=0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$　【103 數乙】

答：(1)(3)(4)

解：(2) 應為發散　(5) 應收斂於0

2. 設a_1，a_2，……，a_n，……是一公比為$\dfrac{1}{2}$的無窮等比數列且$a_1=1$。
試問以下哪些數列會收斂？

(1)$-a_1$，$-a_2$，……，$-a_n$，……　(2)a_1^2，a_2^2，…，a_n^2，……

(3)$\sqrt{a_1}$，$\sqrt{a_2}$，……，$\sqrt{a_n}$，……　(4)$\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{1}{a_2}$，……，$\dfrac{1}{a_n}$，……

(5)$\log a_1$，$\log a_2$，……，$\log a_n$，……。　【106 數乙】

答：(1)(2)(3)

解：(1)首項-1，公比$\dfrac{1}{2}$　(2)首項1，公比$\dfrac{1}{4}$　(3)首項1，公比$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

(4)首項1，公比2，為發散　(5) 首項0，公差$-\log 2$，為發散

3. 令$f(x)=x^3-x^2-2x+1$。
設a,b,c為方程式$f(x)=0$的三個實根，且$a<b<c$，請選出正確的選項。

(1) 極限$\ell im_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$存在

(2) a,b,c至少有一個在0與1之間

(3) $a,a^2,a^3,\cdots,a^n,\cdots$為收斂數列

(4) $b,b^2,b^3,\cdots,b^n,\cdots$為收斂數列

(5) $c,c^2,c^3,\cdots,c^n,\cdots$為收斂數列　【102 數甲】

答：(2)(4)

解：由勘根定理知，三實根$-2<a<-1<0<b<1<c<2$

(1) $f(x)$無$(x-1)$之因式，故$\ell im_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$不存在 (3)(5) 均發散

4. 在實數線上，動點A從原點開始往正向移動，動點B從8的位置開始往負向移動。
兩個動點每一秒一動一次，已知第一秒A、B移動的距離分別為1、4，
且A、B每次移動的距離分別為其前一次移動距離的$\dfrac{1}{2}$倍、$\dfrac{1}{3}$倍。
令c_n為第n秒時A、B的中點位置。請選出正確的選項。

(1) $c_1=\frac{5}{2}$　　(2) $c_2>c_1$　　(3) 數列$\langle c_{n+1}-c_n\rangle$是一個等比數列

(4) $\lim_{n\to\infty} c_n=2$　　(5) $c_{1000}>2$【105 數甲】

答：(1)(4)

解：$a_n=0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-2\times\frac{1}{2^n}$

$b_n=8-4-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}-\cdots-\frac{4}{3^{n-1}}=2+6\times\frac{1}{3^n}$

$c_n=\frac{a_n+b_n}{2}=2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}}$，故知$c_1=\frac{5}{2}$、$c_2=\frac{25}{12}$、$\lim_{n\to\infty} c_n=2$

$c_n=2-\left(\frac{3^n-3\times 2^n}{2^n\times 3^n}\right)=2-\left(\frac{27\times 3^{n-3}-24\times 2^{n-3}}{2^n\times 3^n}\right)$，故知從$n\geq 3$起，$c_n<2$

又$\langle c_{n+1}-c_n\rangle=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^n}$，非等比數列

解：$c_1=\frac{(0+1)+(8-4)}{2}=\frac{5}{2}>c_2=\frac{\left(0+1+\frac{1}{2}\right)+\left(8-4-\frac{4}{3}\right)}{2}=\frac{25}{12}$

$$c_n=\frac{\left(0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(8-4-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}-\cdots-\frac{4}{3^{n-1}}\right)}{2}=2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n-1}}$$

故$\lim_{n\to\infty} c_n=2$，$c_{1000}<2$，而$\langle c_{n+1}-c_n\rangle=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^n}$，非等比數列

5. 令多項式$2(x+1)^n$除以$(3x-2)^n$所得餘式的常數項為r_n。
請問極限$\lim_{n\to\infty} r_n$為下列哪一選項？

(1) 0　(2) $\frac{3}{2}$　(3) 2　(4) 3　(5) 不存在【103 數甲】

答：(3)

解：$2(x+1)^n=(3x-2)^n\,\frac{2}{3^n}+R(x)$

$r_n=R(0)=2-(-2)^n\times\frac{2}{3^n}=2-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\times 2$，故$\lim_{n\to\infty} r_n=2-0\times 2=2$

俞克斌數

6. 設無窮數列$\langle a_n \rangle$符合$a_0=0$且當$n\ge 1$時，a_n滿足

$$a_n-a_{n-1}=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^n, & \text{當}n\text{爲偶數}\\ \left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n, & \text{當}n\text{爲奇數}\end{cases}$$

(1) 將a_6寫成兩個等比級數的差，其中一個有 6 項，另一個有 3 項。

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$的值。

(3) 證明：當$n\ge 0$時$a_{2n+2}-a_{2n}<0$。並依此說明對於所有正整數n，不等式$-\frac{1}{8}\le a_{2n}<0$恆成立。【104 數甲】

答：(1) $a_6=\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^6-\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^5$

(2) $-\frac{1}{8}$

解：(1)

$$\begin{cases}a_1-a_0=\left(\frac{1}{5}\right)^1-\left(\frac{1}{3}\right)^1\\ a_2-a_1=\left(\frac{1}{5}\right)^2\\ a_3-a_2=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\\ a_4-a_3=\left(\frac{1}{5}\right)^4\\ a_5-a_4=\left(\frac{1}{5}\right)^5-\left(\frac{1}{3}\right)^5\\ a_6-a_5=\left(\frac{1}{5}\right)^6\end{cases}\Rightarrow a_6=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3\\ +\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^6\\ -\left(\frac{1}{3}\right)^1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^5\end{cases}$$

(2)

$$a_{2n}=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3\\ +\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{5}\right)^6\\ +\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}\\ -\left(\frac{1}{3}\right)^1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^5\\ -\ldots-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}\end{cases}，\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$$

$(3)\ a_{2n+2}-a_{2n}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$

$$=\frac{5\times 3^{n+2}+3^{n+2}-3\times 5^{n+2}}{15^{2n+2}}=\frac{\left[2\times 3^{n+2}-5^{n+2}\right]\times 3}{15^{2n+2}}<0$$

故知$\langle a_{2n}\rangle$為遞減數列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}\le a_{2n}<a_0$，亦即$-\frac{1}{8}\le a_{2n}<0$

7. 已知首項為a、公比為r的無窮等比級數和等於 5；
首項為a、公比為$3r$的無窮等比級數和等於 7，
則首項為a、公比為$2r$的無窮等比級數和等於________ 【100 學測】

答：$\frac{35}{6}$

解：$\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=5 \ \Rightarrow\ a=5-5r\\ \dfrac{a}{1-3r}=7\ \Rightarrow\ a=7-21r\end{cases}\quad \begin{cases}a=\dfrac{35}{8}\\ r=\dfrac{1}{8}\end{cases}\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{1-2r}=\dfrac{\frac{35}{8}}{1-\frac{2}{8}}=\dfrac{35}{6}$

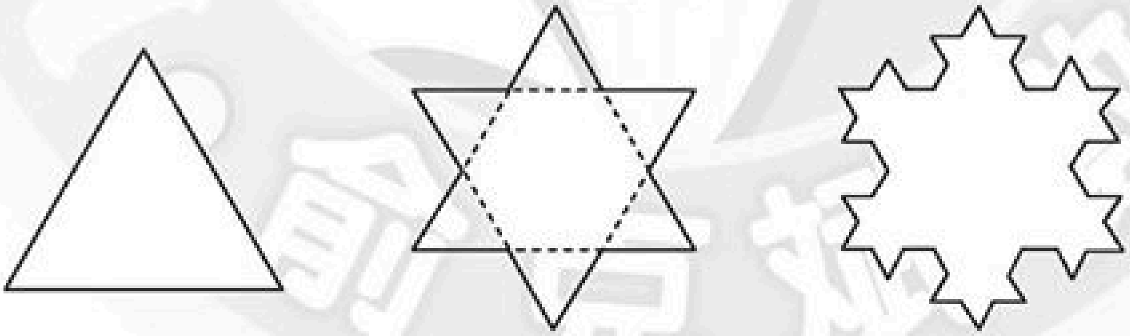
8. 有一無窮等比級數，其首項與第二項之和為 4，又此級數中之任一項必等於該項以後各項和之 2 倍，則此級數之首項________，公比________。 【80 大學聯考】

答：$\frac{5}{8}$

解： 依題意 $\Rightarrow\begin{cases}a_1+a_2=4\\ a_1=2(a_2+a_3+\cdots\cdots)\end{cases}\ \Rightarrow\begin{cases}a_1+a_1r=4\\ a_1=2\cdot\dfrac{a_1r}{1-r}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+r)=4\\ 1-r=2r\end{cases}\ \Rightarrow r=\frac{1}{3}$；$a_1=3$………答

9. 設為$T_1,T_2,T_3,\ldots\ldots$一群多邊形，其作法如下：T_1為邊長等於 1 之正三角形；
以T_n每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，
然後將該三分之一線段抹去所得得多邊形為T_{n+1}，$n=1,2,\ldots\ldots$(如圖所示)。
令a_n表T_n的周長，請計算T_3之面積及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$之和。 【84 日自】



答：$\frac{10}{27}\sqrt{3}$，$\frac{4}{3}$

解：如圖T_1的周長$a_1=1\times3=3$，T_2的周長$a_2=\frac{1}{3}\times4\times3=4$，

T_3的周長$=\frac{1}{9}\times16\times3=\frac{16}{3}$，(依此類推) 故周長之公比$=\frac{4}{3}$，

則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}(\frac{3}{4})^2+\cdots=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

而T_3面積$=1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2+3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+12\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{10}{27}\sqrt{3}$

10.若首項為a，公比為0.01的無窮等比級數和等於循環小數$1.\overline{2}$，則$a=$______。【101學測】

答：1.21

解：$\frac{a}{1-0.01}=1.\overline{2}=1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9} \Rightarrow a=1.21$

例題篇：知來之對策（含109年最新模擬考）

1. 已知$n\in N$，則360^n一共有$(n+1)(2n+1)(3n+1)$個正因數。將這些正因數由小而大排列，分別為a_1、a_2、a_3、……、a_k，其中$k=(n+1)(2n+1)(3n+1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_k}{360^n}=$______。

答：$\frac{15}{4}$

2. $n\in N$，若二次函數$y=8^n x^2-2^n\left(2^n+1\right)x+1$之圖形在$x$軸上之截弦為$\ell_n$，求$\sum_{n=1}^{\infty}\ell_n=$______。

答：$\frac{2}{3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=a$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n-1}{n!}=b$，則$(a,b)=$______。

答：$\left(\frac{1}{12},1\right)$

4. 無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)\left(\frac{1}{5}\right)^n$ 的和為________。

答：$\frac{19}{16}$

5. 設一正數 A 與 $0.\overline{33}$ 相乘時，誤以 0.33 乘之，得誤差為 21，求此正數____。

答：6300

6. 設投擲一個公正的骰子兩次依序出現的點數分別為 a 與 b，試問下列哪些選項是正確的？
(1)無窮數列 $\langle (a+b)^n \rangle$ 為收斂的機率是0
(2)無窮數列 $\langle (a-b)^n \rangle$ 為收斂的機率是 $\frac{4}{9}$
(3)無窮數列 $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$ 為收斂的機率是 $\frac{7}{12}$
(4)在無窮數列 $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$ 為收斂的條件下，無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 為收斂的機率是 $\frac{5}{7}$
(5)在無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 為收斂的條件下，無窮數列 $\left\langle \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\rangle$ 為收斂的機率是 $\frac{5}{7}$。

答：(1)(3)(4)

俞克斌數學