俞克斌杯杯的

甲子玄機

For 2020 大學指考

丙寅(3)：夾擠定理

觀念篇

給定一個數列$\langle b_n \rangle$，若存在兩個數列$\langle a_n \rangle$與$\langle c_n \rangle$滿足：

(1) 從某一項$n \ge n_0$後，恆有$a_n \le b_n \le c_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

則數列$\langle b_n \rangle$是收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

例題篇：鑑往之傾向

1. (1) 試證：$n^2 \le 2^n$對所有大於或等於4之自然數n均成立。

(2) 試證：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$　【79日自】

$\boxed{證}$：(1) (*i*)當$n = 4$時，左式$=4^2=16$，右式$=2^4=16$，故左式≤右式，成立

(*ii*)設$n=k$時，$k^2 \le 2^k$，成立

(*iii*)則$n=k+1$時，$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \le 2k^2 \le 2\times 2^k = 2^{k+1}$

由數學歸納法原理得知，原命題得證。

註：$k^2 - 2k - 1 = k\underbrace{(k-4)}_{\ge 0} + 2k - 1 = k\underbrace{(k-4)}_{\ge 0} + 2\underbrace{(k-4)}_{\ge 0} + 7 \ge 0$

(2) 由(1)知：$n^2 \le 2^n \Rightarrow 0 < \dfrac{n}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$，且$\ell im_{n\to\infty} 0 = 0$、$\ell im_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

由夾擠定理知：$\ell im_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 若 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$，則

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ 之值為______。(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$ 之值為______。

答：(1) $\frac{1}{2}$　(2) 4

2. 若 $a_n=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 之值為______。

答：0

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{x}{4}\right]}{x}=$ ______。（[ ]表高斯符號）

答：$\frac{1}{4}$

4. (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{3}\right]}{n}=$ ______。（[ ]表高斯符號）

(2)利用(1)，求 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}-n\right)=$ ____，$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\left[\frac{n}{3}\right]}\right)=$ ____

答：$\frac{1}{3}$

5. (1) 試證：$n^3\le 2^n$ 對所有大於或等於10之自然數 n 均成立。

(2) 試證：$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

證：

6. (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{100}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{999}}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$。

答：(1) 1　(2) 1　(3) 5