

# 俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020  
大學指考

## 戊辰(5)：函數極限

### 觀念篇

設  $f(x)$  為一個函數。

當  $x$  趨近  $a$  時，函數  $f(x)$  會趨近於一個固定的實數  $p$ 。

則稱函數  $f(x)$  在  $x$  趨近  $a$  時的極限為  $p$ ，記為： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ 。

- ① “ $x \rightarrow a$ ” 的意思為 “ $x$  從  $a$  的左、右兩邊極端靠近  $a$ ”。
- ② 因此函數  $f(x)$  在  $x = a$  時不一定有定義，即  $f(a)$  不一定存在。
- ③ 即使  $f(a)$  存在， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$  也不一定等於  $f(a)$ 。

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 試問下列有關極限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$  的敘述何者正確？
- (1) 極限不存在    (2) 極限為 0    (3) 極限為 1  
(4) 極限為 5    (5) 極限為 -2    【96 數甲】

答：(4)

解：原式 =  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 3) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5$ 。故選(4)

**例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）**

1. 求： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{76} - 1}{x}$

答：76

2. 試求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$ ， $n \in \mathbb{N}$

答： $\frac{n(n+1)}{2}$ 

3. 試求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cdot \left( \frac{1-x^{20}}{1-x} - 20 \right)$

答：-190

4. 求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ ， $n \in \mathbb{N}$

答： $\frac{n(n+1)}{2}$ 

5. 若  $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}} - 2}{x-81}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 81} f(x)$  之值為\_\_\_\_\_。

答： $\frac{1}{432}$ 

6. 已知  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - a}{\sqrt[3]{x} - 3}$  存在且其值為  $b$ ，試求數對  $(a, b) =$ \_\_\_\_\_。

(hint：視  $\sqrt[3]{x}$  為另一變數)答： $\left( 2, \frac{1}{4} \right)$ 

7. 設  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^3 + cx + d}{x^2 + 3x - 4}$ ， $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，已知  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ，  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ，則序組  $(a, b, c, d) =$ \_\_\_\_\_。

答： $(0, 3, 4, -7)$

8. 若多項式  $f(x)$  滿足  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x) - 3x^3}{x^2} \right) = 4$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$  .

則多項式  $f(x)$  為 \_\_\_\_\_。

答：  $3x^3 + 4x^2 + 2x$

9.  $f(x) = \frac{a\sqrt{x^2 + 5} - b}{x - 2}$  , 滿足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  且  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = k$  存在 .

則  $(a, b, k) =$  \_\_\_\_\_。

答：  $\left( 1, 3, \frac{2}{3} \right)$

