俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

乙巳(6)：單邊極限

觀念篇

(1) 左極限：

$x \to a^-$ 表示 x 從 a 的左側趨近 a（即 $x<a$ 且 $x \to a$）。

當 $x \to a^-$ 時，函數 $f(x)$ 會趨近於定數 p，

記作 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)=p$。（稱 $f(x)$ 的左極限為 p）

(2) 右極限：

$x \to a^+$ 表示 x 從 a 的右側趨近 a（即 $x>a$ 且 $x \to a$）。

當 $x \to a^+$ 時，函數 $f(x)$ 會趨近於定數 p，

記作 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=p$。（稱為 $f(x)$ 的右極限 p）

(3) 函數極限存在的條件：

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=p \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x)=p$ 且 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=p$，

亦即函數極限存在的充要條件為函數的左右極限皆存在且兩個極限相等。

例題篇：鑑往之傾向

1. 假設兩地之間的通話費，
   第一個半分鐘是5元，之後每半分鐘是2元，不滿半分鐘以半分鐘計算，
   則 t 分鐘的通話費 $C(t)$ 公式如下（單位元）：$C(t)=5-2[1-2t]$，
   其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如：$[3.5]=3$，$[-3.1]=-4$，$[-5]=-5$ 等。
   試問下列哪些選項是正確的？
   (1) 10分鐘的通話費是43元　(2) 在 $t \ge 0$ 時，$[1-2t]=-[2t-1]$ 恆成立
   (3) $\lim\limits_{t \to 10.5} C(t)=45$　(4) $\lim\limits_{t \to 11.2} C(t)=49$【100 數甲】

答：(1)(4)

解：(1)正確，$C(10)=5-2[1-20]=43$

(2)錯誤，例：$t=0.3$ 時 $[1-2t]=[1-0.6]=[0.4]=0$

$[2t-1]=[0.6-1]=[-0.4]=-1$

則 $[1-2t] \ne -[2t-1]$

(3)錯誤，$\lim\limits_{t \to 10.5^+}(5-2[1-2t])=\lim\limits_{t \to 10.5^+}(5-2(-21))=47$

$\lim\limits_{t\to 10.5^-}\left(5-2[1-2t]\right)=\lim\limits_{t\to 10.5^-}\left(5-2(-20)\right)=45$

$\therefore \lim\limits_{t\to 10.5} C(t)$不存在

(4)正確，$\lim\limits_{t\to 11.2^+}\left(5-2[1-2t]\right)=\lim\limits_{t\to 11.2^+}\left(5-2(-22)\right)=49$

$\lim\limits_{t\to 11.2^-}\left(5-2[1-2t]\right)=\lim\limits_{t\to 11.2^-}\left(5-2(-22)\right)=49$

$\therefore \lim\limits_{t\to 11.2} C(t)=49$

2. 設$f(x)$為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}$存在，試選出正確的選項：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$存在　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$存在　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)\dfrac{x}{|x|}$存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在　(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$存在。　【107 數甲】

答：(1)(2)(5)

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1)^2=1$、$\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)^2=1$，故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}$，正確

(3)必須$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+1\right)$存在才成立

(4)反例：$f(x)=\dfrac{x}{|x|}$，則$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$不存在

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}\times\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)\dfrac{|x|}{x}\times f(x)\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2$

例題篇：知來之對策

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\left|9-x^2\right|}=$______。

答：極限值不存在（發散）

2. $n\in N$，求：(1) $\lim\limits_{x\to n}\left[x-[x]\right]$ (2) $\lim\limits_{x\to n}\left[x-[x-1]\right]$ (3) $\lim\limits_{x\to n}\left([x]+\sqrt{x-[x]}\right)$

答：(1) 0 (2) 1 (3) n

3. 求：(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[x+1]+|x|}{x}$ (3) $\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{[x+1]+|x|}{x}$

答：(1) 極限值不存在（發散）(2) 極限值不存在（發散）

4. 設 a、b 皆為實數，且 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+b\text{，當 }x\ge2\\x^3-2ax^2+3bx+1\text{，當 }x<2\end{cases}$，

若 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=9$，則數對 (a,b) 為______。

答：$\left(-\dfrac{15}{2},-10\right)$

5. 下列關於各選項極限值的敘述，哪些是存在且等於 $\dfrac{1}{2}$？

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x^2-2x}$

答：(1)