俞克斌杯杯的 甲子玄機 For 2020 大學指考

庚午(7)：連續、中間值定理

觀念篇

(1) 若函數 $f(x)$ 滿足下列條件：

①$f(a)$ 存在。

② $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

③ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

(2) 若函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續，則稱函數 $f(x)$ 為連續函數。

(3) 多項式函數、指數函數、對數函數、正弦函數、餘弦函數，

若沒有特別限制時，均連續函數。

(4) ①中間值定理：

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]\equiv a\le x\le b$ 上是連續函數，

且 $f(a)\ne f(b)$，而 k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的任一實數，

則在開區間 $(a,b)\equiv a<x<b$ 之間至少存在一個實數 c，

使得 $f(c)=k$。

②勘根定理：

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]\equiv a\le x\le b$ 上是連續函數，

且 $f(a)f(b)<0$，

則在開區間 $(a,b)\equiv a<x<b$ 之間至少存在一個實數 c，

使得 $f(c)=0$。

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，

已知 $f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(5)=5$，

則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

(1)$(-\infty,0)$ (2) $(0,1)$ (3)$(1,2)$ (4)$(2,5)$ (5)$(5,\infty)$ 【96 學測】

答：(2)(4)

解：設 $f(x)=1(x-1)(x-2)(x-5)+p(x-1)(x-2)+q(x-1)+r$

$f(1)=1 \Rightarrow f(1)=r=1$

$f(2)=2 \Rightarrow f(2)=q+1=2 \Rightarrow q=1$

$f(5)=5 \Rightarrow f(5)=p(4)(3)+4+1=5 \Rightarrow p=0$

故$f(x)=1(x-1)(x-2)(x-5)+(x-1)+1$

而$f(0)=-10$、$f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(3)=-1$、$f(4)=-2$、$f(5)=5$

根據勘根定理，故區間$(0,1)$、$(2,3)$、$(4,5)$必定有實根

解：依題意，$f(x)=x$的三根為 1、2、5

故$f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-5)\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+x$

而$f(0)=-10$、$f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(3)=-1$、$f(4)=-2$、$f(5)=5$

根據勘根定理，故區間$(0,1)$、$(2,3)$、$(4,5)$必定有實根

2. 設x為一正實數且滿足$x\cdot 3^{x}=3^{18}$；若x落在連續正整數k與$k+1$之間，則$k=$______。【94學測】

答：15

解：令$f(x)=x\cdot 3^{x}-3^{18}\Rightarrow\begin{cases} f(15)=15\times 3^{15}-3^{18}=3^{15}(15-27)<0 \\ f(16)=16\times 3^{16}-3^{18}=3^{16}(16-9)>0 \end{cases}$

由勘根定理得知：$f(x)=x\cdot 3^{x}-3^{18}=0$在區間$(15,16)$內有實根，故$k$取15

3. 設$P(x)$是一個五次實係數多項式。
若$P(x)$除以$x-3$的餘式是 2，且商$Q(x)$是一個係數均為正數的多項式，
試問下列哪些選項是正確的？
(1)$P(x)=0$與$Q(x)=0$有共同的實根
(2) 3 是$P(x)=2$唯一的實根
(3)$P(x)$不能被$x-4$整除
(4) $P(x)=0$一定有小於 3 的實根
(5) $P(x)$除以$(x-3)(x+3)$的餘式也是 2 【96 數甲】

答：(3)(4)

解：(1)不妨令$P(x)=(x-3)\left[ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e\right]+2$，

其中$Q(x)=ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e$係數均為正，

當$Q(\alpha)=0$時，$P(\alpha)=2$。表$P(x)=0$與$Q(x)=0$沒有共同的實根

(2)$P(x)-2=(x-3)\left[ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e\right]$，其中$x=3$為$P(x)-2=0$之根，

但$\left[ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+dx+e\right]=0$仍可能有『四實根』或『二實二虛根』

故『3 是$P(x)=2$唯一的實根』不一定成立。

(3)當$x\geq 3$，$P(x)$恆正，由「勘根定理」知：$x\geq 3$的範圍中，$P(x)=0$並無實根，

即$P(x)$不存在$(x-a)$，$a\geq 3$之因式，故$P(x)$不能被$(x-4)$整除。

(4)$P(x)$是一個五次實係數多項式，$P(x)=0$至多存在4個複根，故第5根必為實根，

承(3)知，此實根必小於3。

(5)不能確定。

例題篇：知來之對策

1. 設函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 2 \\ \dfrac{ax^2-x+b}{x-2} & x<2 \end{cases}$ 為一連續函數，試求數對 $(a,b)=$________。

答：$\left(\dfrac{3}{2},-4\right)$

2. a、$b\in R$，若函數 $f(x)=\begin{cases} -4x+(3a-1) & x\leq -2 \\ ax^2-bx+3 & -2<x\leq 1 \\ \sqrt{bx^2+15} & x>1 \end{cases}$ 在 R 上為連續函數，求序對 (a,b) 之值________。

答：$(2,1)$

3. 已知方程式 $x^2-\ell og_{10}x-200=0$ 有兩個實數根，其中有一根介於 0 與 1 之間，另一根介於 N 與 $N+1$ 之間，則整數 $N=$________。

答：14

4. $n\in N$，若已知 $f(x)=n^2x^3+nx-1=0$ 僅有一個實根，
(1)證明此實根 $x_0\in$ 區間 $\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$
(2)當 $n=1$、2、3、…，所對應的實根 x_n，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=$________。

答：(2) 0