俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

壬申(9)：微分第二型定義

觀念篇

導數：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

當 $x-a=h$，亦即 $x=a+h$ 時，因為 $x\to a$，則 $h\to 0$

因此 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

例題篇：鑑往之傾向

1. 若多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$ 及 $f'(1)=-15$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{3h}=$ ________。

【85 日自】

答：-5

解：$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 存在，極限值存在

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}=-15\times\frac{1}{3}=-5$$

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. $x,y\in R$，函數 $f(x)$ 在其定義域內之導數均存在，
若 $f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$，且 $f'(1)=5$，求 $f'(3)=$ ________。

答：3

2. 設函數$f(x)$滿足$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$且$f'(0)=0$，則：
(1) $f(0)=$________。　(2) $f'(a)=$________。

答：(1) 0　(2) $2a$

3. 對任意x均使函數$f(x)$恆為正值，且$f(x+y)=2f(x)f(y)$，
若$f'(0)=-2$，則$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=$________。

答：-4