俞克斌杯杯的 甲子玄機 For 2020 大學指考

癸酉(10)：可微分、導函數

觀念篇

(1) 可微分：當 $x \to a^{+}$ 時，$\lim\limits_{x \to a^{+}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0^{+}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha$ 存在

當 $x \to a^{-}$ 時，$\lim\limits_{x \to a^{-}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0^{-}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha$ 存在

則稱 $f'(a)$ 存在，或稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分。

(2) 導函數：若函數 $f(x)$ 在 $x \in (p,q)$ 開區間內每一個點 a 都可微分

亦即 $f(x)$ 在 $x \in (p,q)$ 開區間內每一個點 a 的導數 $f'(a)$ 都存在，

則稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 在 $x \in (p,q)$ 開區間內的導函數。

(3) 微分三部曲：極限值存在 $\underset{\text{必定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}$ 連續 $\underset{\text{必定}(b)}{\overset{\text{不一定}(a)}{\rightleftarrows}}$ 可微分

例題篇：鑑往之傾向

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 已知 $f(x)=\left|x^{2}+3x\right|$ 在 $x=-3$ 處圖形連續，
   試證：$f(x)$ 在 $x=-3$ 處不可微分。

2. 已知函數 f 在 $x=a$ 點『可微分』，亦即 $f'(a)$ 存在，
   試證：函數 f 在 $x=a$ 點為『連續』

2. 函數 $f(x)=\begin{cases} x^{2}-1, & x \le 1 \\ \dfrac{ax-b}{x+1}, & x > 1 \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數存在，求 a、b 之值。

答：$a=4$，$b=4$

3. 設 $a,b\in R$，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, x<0\\ ax+b, x\geq 0\end{cases}$，若 $f'(0)$ 存在，則數對 $(a,b)=$________。

$\boxed{答}$：$a=\dfrac{1}{8}$，$b=\dfrac{1}{2}$

4. 設 $f(x)=\begin{cases}ax+b[x]，x\geq 2\\ x^2 \quad ，x<2\end{cases}$，其中 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，
若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處可微分，則常數數對 (a,b) 為________。

$\boxed{答}$：$(4,-2)$

5. 若 $f(x)$ 為『偶函數』，且 $f'(x)$ 存在，求證 $f'(x)$ 為『奇函數』。
反之，若 $f(x)$ 為『奇函數』，且 $f'(x)$ 存在，求證 $f'(x)$ 為『偶函數』。