俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

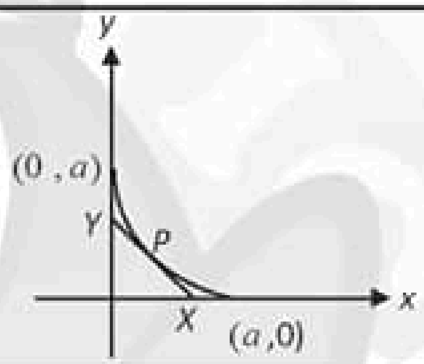
乙亥(12)：切線（已知切點）

觀念篇

1. 已知切點
2. 求原函數的導函數，則切點處之導數亦即切線斜率
3. 利用點斜式，求切線

例題篇：鑑往之傾向

1. $a\in R^{+}$ 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 圖形如右，
過曲線上一點 $P\left(\dfrac{a}{9},\dfrac{4a}{9}\right)$ 作切曲線之切線，
而和 x 軸，y 軸分別交於 X，Y 兩點，
求 $\overline{OX}+\overline{OY}=$______。
【81 日自】



答：a

解：$P\left(\dfrac{a}{9},\dfrac{4a}{9}\right)$ 即為切點，$\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\xrightarrow{\text{平方}}\ y=a-2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}}+x$

切線斜率：$m=y'\Big|_{x=\frac{a}{9}}=-\sqrt{a}x^{-\frac{1}{2}}+1\Big|_{x=\frac{a}{9}}=-\sqrt{a}\times\dfrac{1}{\sqrt{\frac{a}{9}}}+1=-2$，

故切線 $y-\dfrac{4a}{9}=-2\left(x-\dfrac{a}{9}\right)\ \Rightarrow\ X\left(\dfrac{a}{3},0\right)$、$Y\left(0,\dfrac{2a}{3}\right)$

故 $\overline{OX}+\overline{OY}=\dfrac{a}{3}+\dfrac{2a}{3}=a$

2. 設 $p(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1,3)$，$(-1,5)$ 兩點。
若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率為 7，而在點 $(-1,5)$ 的切線斜率為 -5，
試求 $p(x)$。(12 分)【97 數甲】

答：$x^{3}+3x^{2}-2x+1$

解：設 $p(x)=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$

圖形通過$(1,3)$，則$p(1)=a+b+c+d=3$......(1)
圖形通過$(-1,5)$，則$p(-1)=-a+b-c+d=5$......(2)
又$p'(x)=3ax^2+2bx+c$
圖形在點$(1,3)$的切線斜率為7，故$p'(1)=3a+2b+c=7$......(3)
圖形在點$(-1,5)$的切線斜率為-5，故$p'(-1)=3a-2b+c=-5$......(4)
由(3)−(4) $\Rightarrow$ $4b=12$ $\Rightarrow$ $b=3$。(1)+(2) $\Rightarrow$ $b+d=4$ $\Rightarrow$ $d=1$
由(1)−(2) $\Rightarrow$ $a+c=-1$。由(3)+(4) $\Rightarrow$ $3a+c=1$ $\Rightarrow$ $a=1,c=-2$
$\therefore p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

解：$\deg p(x)=3 \Rightarrow \deg p'(x)=2$
設$p'(x)=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+7$，
而$p'(-1)=-2b+7=-5 \Rightarrow b=6$
故$p'(x)=ax^2+6x+(1-a) \Rightarrow p(x)=\frac{a}{3}x^3+3x^2+(1-a)x+m$
則$p(1)=\frac{a}{3}+3+(1-a)+m=3$、$p(-1)=\frac{-a}{3}+3-(1-a)+m=5$
故$m=1$、$a=3$ $\Rightarrow$ $p(x)=x^3+3x^2-2x+1$

例題篇：知來之對策（含109年最新模擬考）

1. 函數$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$之圖形在$x=-2$處的切線方程式為________。

答：$x+3y-1=0$

2. 拋物線$y=ax^2$上三點P、Q、R之橫座標各為$p,q,r\ (r\neq 0)$，若過R的切線L，$L // \overleftrightarrow{PQ}$，則方程式$rx^2+(p+q)x+pq=0$兩根之和為________。

答：-2

3. 設多項式$f(x)$的圖形$y=f(x)$過點$A(1,-2)$，若$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$，求以$A$為切線之切線方程式。

答：$y=-2$