

# 俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020  
大學指考

## 丁丑(14)：切線（圓錐曲線）

### 觀念篇

- (1) 已知拋物線  $y^2 = 4cx$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx + \frac{c}{m}$
- (2) 已知拋物線  $x^2 = 4cy$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx - m^2 c$
- (3) 已知橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$
- (4) 已知橢圓  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx \pm \sqrt{a^2 + b^2 m^2}$
- (5) 已知雙曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$
- (6) 已知雙曲線  $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，斜率為  $m$  的切線為  $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2 m^2}$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 通過點  $(5, 0)$  而與拋物線  $y = x^2 - 9$  相切的直線有：  
 (A)  $y = 2(x - 5)$       (B)  $y = -7(x - 5)$       (C)  $y = 27(x - 5)$   
 (D)  $y = 20(x - 5)$       (E)  $y = 18(x - 5)$ 。      [77 大學聯考]

答：(A)(E)

解：∵ 拋物線為  $x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(y + 9)$  ∴ 設切線為  $(y + 9) = mx - m^2\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \because \text{過}(5, 0) &\Rightarrow 9 = 5m - \frac{m^2}{4} \Rightarrow m^2 - 20m + 36 = 0 \\ &\Rightarrow (m - 2)(m - 18) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ 或 } 18 \end{aligned}$$

故切線為  $y = 2(x - 5)$  或  $y = 18(x - 5)$ ……答

**例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）**

1. 過點  $A(5,0)$  作橢圓  $\Gamma: 9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$  之切線，  
求此切線之斜率  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $-\frac{4}{5}$  或  $2$

2. 設雙曲線  $\Gamma: x^2 - y^2 = 9$ ， $A(1,1)$ ，自  $A$  作  $\Gamma$  之切線，則切線方程式為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $5x + 4y = 9$  或  $x - y = 0$

