俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

乙卯(16)：極大極小

觀念篇

(1) 極大值與極小值：

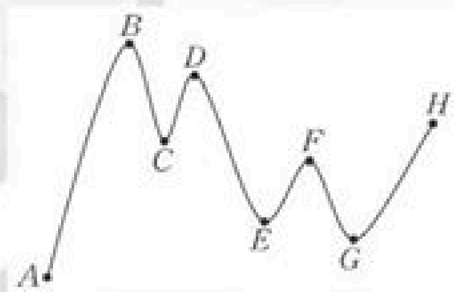
若在$(a,f(a))$附近的點x，其函數值皆小於$f(a)$，稱$f(a)$為極大值。

若在$(b,f(b))$附近的點x，其函數值皆大於$f(b)$，稱$f(b)$為極小值。

設函數$y=f(x)$在區間I的圖形如右，則：

極大值發生的點在B、D、F、H(端點)

極小值發生的點在A(端點)、C、E、G點



(2) 最大值與最小值：

在區間I內找到α與β，

使得$\forall x\in I$，恆有$f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$，

稱$f(\alpha)$為區間I內之最小值，$f(\beta)$為區間I內之最大值。

最大值發生的點在B點；

最小值發生的點在A點；

觀念辨正：(i)函數在區間I的最大值及最小值都只能有一個

(ii)最大值及最小值可以發生在不只一個點。

(iii)極大值與極小值可以不只一個。

(iv)極大值有可能小於極小值

(3) 多項式函數極值的檢定法

(i) 費馬定理：多項式函數$f(x)$在開區間(a,b)上有極值$f(\alpha)$，則$f'(\alpha)=0$

(ii) 多項式函數$f(x)$極值可能發生的點：

① $f'(x)=0$的點　　② 閉區間$[a,b]$的端點。

(iii) 極大值或極小值的判斷：

① 當$x<\alpha$時$f(x)$遞增且$x>\alpha$時$f(x)$遞減，則$f'(\alpha)=0$處為極大點

（或：$f''(x)<0$，表$f'(x)$遞減，此時$f'(\alpha)=0$處為極大點）

當$x<\alpha$時$f(x)$遞減且$x>\alpha$時$f(x)$遞增，則$f'(\alpha)=0$處為極小點

（或：$f''(x)>0$，表$f'(x)$遞增，此時$f'(\alpha)=0$處為極小點）

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：
   (1) 函數 f 的圖形在點 $(1,-1)$ 的切線斜率為正　　(2) 函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點
   (3) 函數 f 唯一相對極小值為 $\dfrac{-9}{4}$　　(4) $f(\pi)>0$
   (5) $f\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)>0$　　【103 數甲】

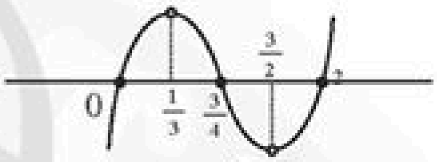
答：(3)(4)

解：$f(x)=x(4x-3)(x-2)$

$f'(x)=12x^2-22x+6=2[3x-1][2x-3]$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{25}{27}$



$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-9}{4}$

(1) $f'(1)<0$　　(2) 與 $y=1$ 交於一點

(5) $\cos\dfrac{4\pi}{7}<0$　$\therefore f\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}\right)<0$

2. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，
   則 $f'(0)=$________【99數甲】

答：-15

解：$f''(x)=8x+11 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=4x^2+11x+c$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值 $\quad\Rightarrow\quad f'(1)=4+11+c=0 \quad\Rightarrow\quad c=-15$

則 $f'(0)=c=-15$

3. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，$g(x)$ 為實係數三次多項式。
   已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，
   而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$，$x=0$ 及 $x=4$，
   且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的(相對)極小值皆發生於 $-4<x<0$。請選出正確的選項。
   (1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正
   (2) $f(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$　　(3) $g(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$
   (4) $g(-1)=g(-3)$　　(5) $g(-1)=-g(1)$　　【104 數甲】

答：(2)(5)

解：(1) $f(x)=a(x+4)x$，$g(x)=b(x+4)(x)(x-4)$

且 $a>0$，$b<0$（$\because$ 極小值發生在 $-4<x<0$）

(2) $f(x)=a\left(x^2+4x\right)=a\left[(x+2)^2-4\right]$，$x=-2$ 時，有 Min

(3) $g(x)=b\left(x^3-4x\right) \Rightarrow g'(x)=b\left(3x^2-4\right)$

x		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	Min	↗	Max	↘

$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 時，有 Min　　$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 時，有 Max

(4) $g(-1)=15b\neq g(-3)=21b$　　(5) $g(-1)=15b=-g(1)=-(-15b)$

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 若 $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$，$g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$，設當 $x=a$ 時，$g(x)$ 有最小值 b，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿＿。

答：$(3,-24)$

2. 設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，又已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 時有極值 2，試求 $f(-1)=$＿＿＿＿＿。

答：6

3. 設 $f(x)=ax^3-6x+b$，已知 $f(x)$ 之極大值 5、極小值 1，求 a、b。

答：$a=8$，$b=3$

4. 設 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 在 $x=-2$ 時有極值 -2，求 $(a,b)=$＿＿＿＿＿。

答：$(8,6)$