俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

庚辰(17)：最大最小

觀念篇：

例題篇：鑑往之傾向

1. 設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a。
已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0$ 、 $x=2$ 兩處。
另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，
以及對任意實數 s 、 r （ $s\le r$ ），$\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$ 恆成立，
且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。
(1) 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，
在圖上標示 $(0,f(0))$、$(2,f(2))$，並由此說明 a 為正或負。
(2) 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），
並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 a 之值。
(3) 在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。 【105 數甲】

答：(1)如圖，$a<0$　(2) 根為 0、2、2，$a=-12$　(3) $G(x)$ 之最小值 0

解：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow\begin{cases}f(0)=d=12\\f(2)=8a+4b+2c+d=12\end{cases}$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow f'(2)=12a+4b+c=0$

因為 $\int_s^r f(t)dt=G(r)-G(s)$，故 $G'(x)=f(x)$

而且 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，故 $G'(1)=f(1)=a+b+c+d=0$

所以：$a=-12$ 、 $b=48$ 、 $c=-48$ 、 $d=12$，

即 $f(x)=-12x^3+48x^2-48x+12$

即 $f(x)-12=-12x^3+48x^2-48x=-12x(x-2)^2=0$

而 $G(0)=0$，即 $G(x)=-3x^4+16x^3-24x^2+12x$

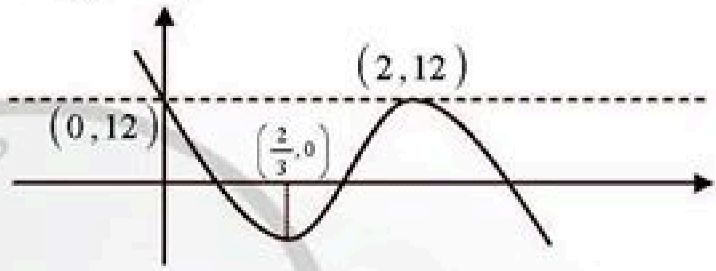
又 $G'(x)=f(x)=-12(x-1)\left(x^2-3x+1\right)$

x	0	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1	2	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$G(x)$	0 ↗		↘	1	↗		↘

比較 $G(0)=0$、$G(1)=1$，得知在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值 $G(0)=0$

又 $f'(x)=-36x^2+96x-48=-12(3x-2)(x-2)$

x	0	$\frac{2}{3}$		2	3
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘



例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 點 $P(x,y)\in\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，求 $-3xy^2+8x+4$ 之最大值______，最小值______。

答：28；-20

2. 設 x、$y\in R$，$x+y=3$，$x\le 3$，$y\le 4$，若 x^3+4y^3 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$______。

答：$(255,12)$

3. $f(x)=-ax^3+3x^2$ 在 $0\le x\le 2$ 中有最小值 -4，
(1)求 $a=$______　(2) $0\le x\le 2$ 中，$f(x)$ 之最大值為______。

答：(1) 2　(2) 1

俞克斌數