俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

辛巳(18)：極值應用

觀念篇

例題篇：鑑往之傾向

1. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，
裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為432平方公分的限制之下，
為了使紙盒的容量達到最大，
他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為______公分。【96數甲】

答：12

解：設底面正方形邊長x公分、高h公分，

則灰色面積$=x^2+4hx=432$平方公分，而體積$x^2\cdot h$

由$x=\dfrac{432-x^2}{4x}$，知體積$f(x)=x^2\cdot\dfrac{432-x^2}{4x}=108x-\dfrac{1}{4}x^3$

令$f'(x)=108-\dfrac{3}{4}x^2=-\dfrac{3}{4}(x+12)(x-12)$

因為$x>0$，故當$x=12$時有最大值

x		-12		12	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

2. 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。
這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，
其底圓半徑原為12公分且以每秒1公分的等速率縮短，
而長度以每秒20公分的等速率增長。
已知神針之底圓半徑只能從12公分縮到4公分為止，
且知在這段變形過程中，當底圓半徑為10公分時其體積最大。
(1)試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？
(2)試求定海神針原來的長度。
(3)假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。【95數甲】

答：(1)2秒　(2)60公分　(3)220公分

解：(1) 依題意$f(t)=\pi(12-t)^2(\ell+20t)$，$\ell$為神針原長

當底圓半徑$(12-t)=10$時，體積最大，此時$t=2$（秒）

(2) $f'(2)=\pi\left[-2(12-t)(\ell+20t)+(12-t)^2\cdot 20\right]\Big|_{t=2}=0$

$\Rightarrow \pi\left[-2\times 10\times(40+\ell)+10^2\times 20\right]=0\Rightarrow \ell=60$（公分）

(3) $f'(t)=\pi\left[-2(12-t)(60+20t)+(12-t)^2\cdot 20\right]=60\pi[t-2][t-12]$

制出三欄表：

$\begin{pmatrix}4\le 12-t\le 12\\ \Rightarrow 0\le t\le 8\end{pmatrix}$

t		2		8		12	
$f'(t)$	$+$	0		$-$		0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$

當 $t=8$ 時，有 $Min=\pi(4)^2(60+160)$，當時之長度 $(60+160)=220$（公分）

3. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，
當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。
每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。
假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p，
以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0\le p\le 1$），請選出正確的選項：
(1) 只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為 $p^3+(1-p)^3$
(2) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式
(3) $f(p)$ 的常數項等於 3
(4) 函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值
(5) $f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{4}{5}\right)$
【103 數甲】

答：(1)(3)(4)

解：(1) 甲連三勝或連三敗：$p^3+(1-p)^3$

(2)(3) $f(p)=3\left[p^3+\left(1-p^3\right)\right]+4\left[p^3(1-p)+p(1-p)^3\right]\times\frac{3!}{2!}$

$+5\left[p^3(1-p)^2+p^2(1-p)^3\right]\times\frac{4!}{2!2!}$

$=3\left[1-3p+3p^2\right]+12\left[-2p^4+4p^3-3p^2+p\right]$

$+30\left[p^4-2p^3+p^2\right]$

$=6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$

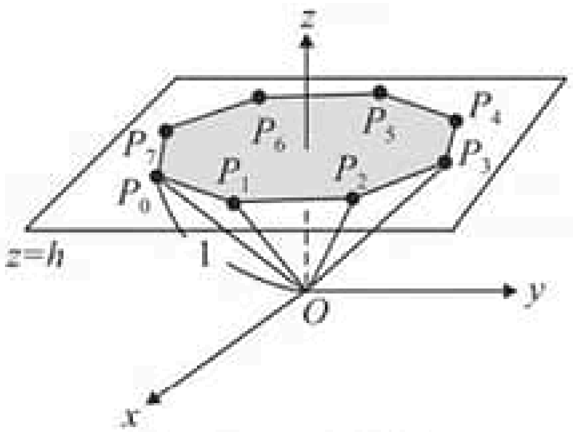
(4) $f'(p)=24p^3-36p^2+6p+3=(2p-1)\left[12p^2-12p-3\right]$

x		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$	(0)	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	Max	$\searrow$		$\nearrow$

又 $0\le p\le 1$，故當 $p=\frac{1}{2}$ 時，$f(p)$ 有最大值

(5) $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)$

4. 坐標空間中，$O(0,0,0)$為原點。
平面$z=h$（其中$0\le h\le 1$）上有一以$(0,0,h)$為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取8點構成正八邊形$P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段$\overline{OP_j}$（$0\le j\le 7$）的長度都是1。
請參見示意圖。



(1)試以h表示向量內積$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}$。（4分）
(2)若$V(h)$為以O為頂點、正八邊形$P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$為底的正八角錐體積，
試將$V(h)$表為h的函數（註：角錐體積$=\frac{1}{3}$底面積×高）。（2分）
(3)在$\overrightarrow{OP_0}$和$\overrightarrow{OP_4}$夾角不超過90°的條件下，試問正八角錐體積$V(h)$的最大值為何？（6分）
【106數甲】

答：(1) $2h^2-1$ (2) $V(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-h^3+h\right)$ (3) $\frac{1}{3}$

解：令圓心$H(0,0,h)$，則$\angle P_iOH=\theta\xrightarrow{\overline{HP_i}=\sqrt{1-h^2}}\cos\theta=h,\sin\theta=\sqrt{1-h^2}$

(1)$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=1\times1\times\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2h^2-1$

(2)$V(h)=\left[8\times\underbrace{\frac{1}{2}\times\left(1-h^2\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\Delta P_iHP_{i+1}\text{面積}}\right]\times h\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-h^3+h\right)$

(3)$0\le\cos2\theta=2h^2-1<1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\le h<1$，$V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-3h^2+1\right)$

h		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$V'(h)$	−	0	+	0	−	−
					Max	
$V(h)$	↘		↗		↘	↘

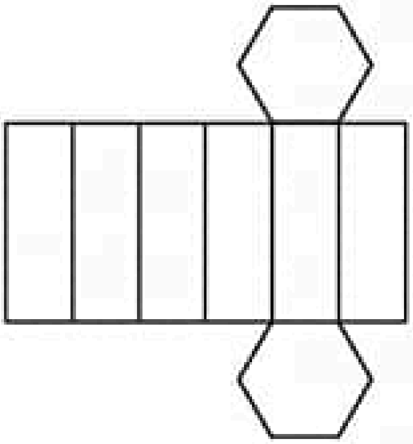
當$h=\frac{1}{\sqrt{2}}$時，$V(h)$有最大值$\frac{1}{3}$

例題篇：知來之對策（含109年最新模擬考）

1. 某地A，一日之降雨機率為p，不降雨機率為$1-p$，今連續四天中只有一天下雨的機率為q，求q之極大值＿＿＿＿。

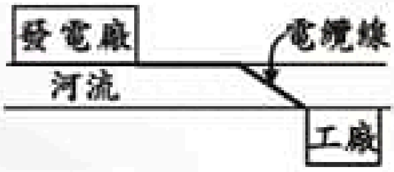
答：$\frac{27}{64}$

2. 家喻戶曉的大熊餅乾，其餅乾盒為一正六角柱；
公司欲重新設計紙盒大小，但仍維持正六角柱造型。
公司先設定餅乾盒的表面積為定值$360\sqrt{3}$平方公分，
若盒蓋（即正六邊形）邊長為a公分及盒高為b公分時，
可讓餅乾盒體積有最大值。求$a:b$的比值＿＿＿＿＿。



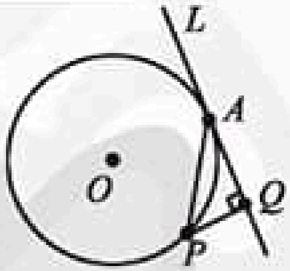
答：$\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. 有一河寬一公里，自北岸一發電廠架設電纜至下游五公里南岸的工廠，
架設方法為先沿河岸架設x公里，再經水底直線連接至工廠，
如圖所示，假設水底架設費用是地面架設費用的$\frac{5}{3}$倍，
試問當$x=$＿＿＿＿＿時，架設的路線最為經濟。



答：$\frac{17}{4}$

4. 如圖，A是半徑r的圓O上一點，
L是過A點的切線，P是圓O上的動點，
由P點作線段$\overline{PQ}$垂直L，垂足Q在L上，
求ΔAPQ面積的最大值。



答：$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$