

俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020
大學指考

壬午(19) : 極值變形

觀念篇

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮多項式函數 $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3$ ，試問以下哪些選項是正確的？

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{f(k+100)} = 0$ (k 為正整數) (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

(3) 函數 f 在區間 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 遞增 (4) 若 $x \geq 0$ ，則 $f(x) \geq 0$

(5) 在坐標平面上 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 3$ 恰有兩個交點。 【95 數甲】

答：(2)(4)(5)

解：(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^5 + 2k^4 - k^3 - 5k^2 + 3}{(k+100)^5 + 2(k+100)^4 - (k+100)^3 - 5(k+100) + 3} = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 10x \Big|_{x=1} = 0$

(3) $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 10x = x(x-1)[5x^2 + 13x + 10]$

制出三欄表：

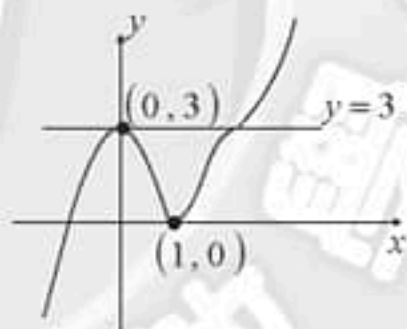
x	0	1
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

顯然在 $0 \leq x \leq 1$ 範圍內係遞減

(4) 當 $x \geq 0$ 時，顯然由三欄表知 $f(1)$ 為 $Min = 0$

當 $x \geq 0$ 時， $f(x) \geq 0$ 成立

(5) $f(0) = 3$ ，表 $y = f(x)$ 與 $y = 3$ 恰交出兩點



俞克斌數

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. $n \in \mathbb{N}$, $x > 1$, 求證 $x^{n+1} + n > (n+1)x$ 。

2. $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q > 1$, x 為一正實數, 試證: $\frac{x^p - 1}{p} \geq \frac{x^q - 1}{q}$ 。

3. 設 $0 < x < 1$, 試証: $\frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{4}(1-x^4) > \frac{2}{3}(1-x^3)$ 恆成立。

