

探 麗 得 珠

滌沙淘金 六經讀罷方拈筆
遺貌取神 五嶽歸來不看山

1. 設 $k = 2008^2 + 2^{2008}$ ，請問 $k^2 + 2^k$ 的個位數為何？
(A)0 (B)2 (C)4 (D)6 (E)8。

答：(D)

解： $R_{10} [k^2] = R_{10} \left[\left(2008^2 + 2^{2008} \right)^2 \right] = R_{10} \left[\left(8^2 + 6 \right)^2 \right] = R_{10} \left[(4+6)^2 \right] = 0$
 $R_4 [k] = R_4 \left[2008^2 + 2^{2008} \right] = R_4 [0+0] = 0$ ，故 $R_{10} [2^k] = R_{10} [2^4] = 6$
 $R_{10} [k^2 + 2^k] = R_{10} [0+6] = 6$

2. 試證： $1^{83} + 2^{83} + 3^{83} + \dots + 83^{83}$ 是 $1+2+3+\dots+83$ 的倍數。

證： $1^{83} + 83^{83} = (1+83) \left[1^{82} - 1^{81} \times 83 + 1^{80} \times 83^2 - \dots - 1 \times 83^{81} + 83^{82} \right] = 84 p_1$
 $2^{83} + 82^{83} = (2+82) \left[2^{82} - 2^{81} \times 82 + 2^{80} \times 82^2 - \dots - 2 \times 82^{81} + 82^{82} \right] = 84 p_2$
 $3^{83} + 81^{83} = (3+81) \left[3^{82} - 3^{81} \times 81 + 3^{80} \times 81^2 - \dots - 3 \times 81^{81} + 81^{82} \right] = 84 p_3$

.....

$$41^{83} + 43^{83} = (41+43) \left[41^{82} - 41^{81} \times 43 + 41^{80} \times 43^2 - \dots - 41 \times 43^{81} + 43^{82} \right] = 84 p_{41}$$

其中 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{41} \in \mathbb{Z}$ ，且 42^{83} 也必為 42 的倍數

所以 $1^{83} + 2^{83} + 3^{83} + \dots + 83^{83}$ 確為 42 的倍數

$$1^{83} + 82^{83} = (1+82) \left[1^{82} - 1^{81} \times 82 + 1^{80} \times 82^2 - \dots - 1 \times 82^{81} + 82^{82} \right] = 83 q_1$$

$$2^{83} + 81^{83} = (2+81) \left[2^{82} - 2^{81} \times 81 + 2^{80} \times 81^2 - \dots - 2 \times 81^{81} + 81^{82} \right] = 83 q_2$$

$$3^{83} + 80^{83} = (3+80) \left[3^{82} - 3^{81} \times 80 + 3^{80} \times 80^2 - \dots - 3 \times 80^{81} + 80^{82} \right] = 83 q_3$$

.....

$$41^{83} + 42^{83} = (41+42) \left[41^{82} - 41^{81} \times 42 + 41^{80} \times 42^2 - \dots - 41 \times 42^{81} + 42^{82} \right] = 83 q_{41}$$

其中 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{41} \in \mathbb{Z}$ ，且 83^{83} 也必為 83 的倍數

所以 $1^{83} + 2^{83} + 3^{83} + \dots + 83^{83}$ 確為 83 的倍數

克斌

顯然 $1+2+3+\dots+83=\frac{(1+83)\times 83}{2}=42\times 83$

因此得證： $1^{83}+2^{83}+3^{83}+\dots+83^{83}$ 是 $1+2+3+\dots+83$ 的倍數

全神貫注 全力以赴

克斌