俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

癸未(20)：凹口方向、反曲點

觀念篇

已知 $\deg f(x)\geq 2$。

(1)當 $f(x)$ 在開區間 (a,b) 上的圖形為凹口向上 $\Leftrightarrow f'(x)$ 遞增 $\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$

(2)當 $f(x)$ 在開區間 (a,b) 上的圖形為凹口向下 $\Leftrightarrow f'(x)$ 遞減 $\Leftrightarrow f''(x)\leq 0$

(3)當 $f(x)$ 之圖形在 $x=a$ 的左右兩側凹向性相反，則稱 $(a,f(a))$ 為 $f(x)$ 的反曲點。
此時 $f''(a)=0$

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $y=f(x)$ 是一個實係數四次多項式，其函數圖形在 $(-1,2)$ 和 $(1,2)$ 各有一個反曲點，且知在 $(-1,2)$ 和 $(1,2)$ 此函數圖形切線的斜率分別為 1 和 -1，
則下列哪些選項是正確的？
(1) $x+1$ 是 $f''(x)$ 的因式　　(2) $f'(x)$ 的常數項不等於零
(3) $f'(-x)=-f'(x)$　　(4) $f(x)$ 首項係數是 1【98 數甲】

答：(1)(3)

解：$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=a-b+c-d+e=2\\f(1)=a+b+c+d+e=2\end{cases}$

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d\Rightarrow\begin{cases}f'(-1)=-4a+3b-2c+d=1\\f'(1)=4a+3b+2c+d=-1\end{cases}$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c\Rightarrow\begin{cases}f''(-1)=12a-6b+2c=0\\f''(1)=12a+6b+2c=0\end{cases}$

故 $\begin{cases}b=0\\d=0\end{cases}$、$\begin{cases}a=\dfrac{1}{8}\\c=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$、$e=\dfrac{21}{8}$，則 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^4-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{21}{8}$

2. 考慮坐標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形(x 為任意實數)，
試問下列哪些選項是正確的？
(1)圖形有最高點，也有最低點　　(2)圖形有水平切線
(3)圖形與任一水平直線恰有一交點　　(4)若 (a,b) 在圖形上，則 $(-a,-b+6)$ 也在圖形上
(5)圖形與三直線 $x=0$、$x=1$、$y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4　【96 數甲】

答：(3)(4)(5)

解：(1)(2)(3) $y=x^3+2x+3$、$y'=3x^2+2$（恆正）

所以函數嚴格遞增，無極值（亦即無最高點，無最低點、無水平切線）

(4) $y''=6x$，表反曲點為 $(0,f(x))=(0,3)$，一元三次函數圖關於反曲點成對稱。

故當 (a,b) 在圖形上，則 $(-a,-b+6)$ 也在圖形上

(5)曲線下面積 $\int_0^1 y\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{4}+1+3>4$

3. 已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：

當 $x<0$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；

當 $0<x<1$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$；

當 $1<x<4$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；

當 $x>4$ 時，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$。請選出正確的選項：

(1) $f'(2)>f'(3)$　　(2) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

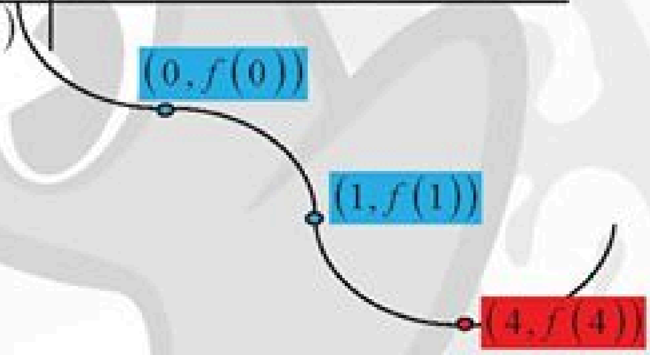
(3) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點　　(4) n 可能為 3

(5) $f(x)$ 的最高次項係數必為正。　【101 數甲】

答：(2)(5)

解：依題意作出四欄表：

x		0		1		4	
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$							



(1) 當 $1<x<4$ 時，$f''(x)>0$，

表 $f'(x)$ 遞增，故 $f'(2)<f'(3)$

(3) $f(x)$ 的圖形有兩個反曲點

$(0,f(0))$、$(1,f(1))$

(4) $f'(x)=mx(x-1)(x-4)$，已為三次，

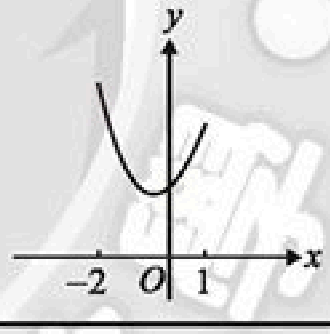
故原 $f(x)$ 應為四次，n 應為 4

4. 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，

在 $-2\le x\le 1$ 範圍內的圖形如示意圖，試選出正確的選項：

(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $c>0$　(4)方程式 $f(x)=0$ 恰有三實根

(5) $y=f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正。　【108 數甲】



答：(2)(3)(5)

解：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$、$f'(x)=3ax^2+2bx+c$、$f''(x)=6ax+2b$

(2)因在 $x=0$ 處，凹口向上，故 $f''(0)=2b>0$

(3)因在 $x=0$ 處，切線斜率為正，故 $f'(0)=c>0$

(5)所示圖形凹口向上，不論接續曲線是在右或左側改為凹口向下，反曲點 y 坐標均為正

(1)若接續曲線是在右側改為凹口向下，則 $a<0$

若接續曲線是在左側改為凹口向下，則 $a>0$

(4)不論接續曲線是在右或左側改為凹口向下，都只跟 x 軸交於一點，故應僅一實根

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-5$，且 $f(x)$ 圖形的反曲點為 $(2,-6)$，試求出此多項式 $f(x)$。

答：$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-5x$

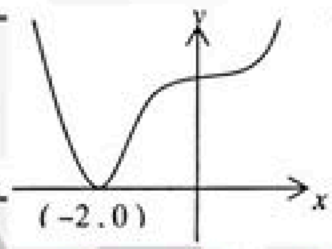
2. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有水平切線，且 $(1,2)$ 為其反曲點，又 $f(2)=3$，求 $f(x)=$_________。

答：x^3-3x^2+3x+1

3. 三次實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $(0,1)$ 為 $y=f(x)$ 的反曲點，又過 $(0,1)$ 的切線為 $x+y=1$，則 $b-c+d=$_________。

答：2

4. 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、$d\in R$，$y=f(x)$ 的圖形如右，且已知過點 $P(0,d)$ 作曲線 $y=f(x)$ 的切線為一水平線，求序組 $(a,b,c,d)=$_________。



答：$\left(\dfrac{8}{3},0,0,\dfrac{16}{3}\right)$