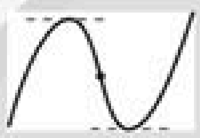
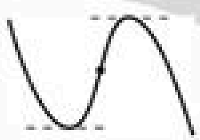
俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

甲申(21)：圖形描繪、根的判斷

觀念篇

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$、$f'(x)=3ax^2+2bx+c$、$f''(x)=6ax+2b$

$f'(x)=0$ 有兩相異實根	$f'(x)=0$ 有兩相等實根	$f'(x)=0$ 無實根
		
		
1. 有波峰（極大值）及波谷（極小值） 2. $f'(x)=0$ 兩根分別為波峰及波谷的 x 坐標	1. 沒有波峰、波谷， 2. 反曲點的切線為水平線	1. 沒有波峰、波谷， 2. 反曲點的切線非水平線

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮三次多項式 $f(x)=-x^3-3x^2+3$，試回答下列問題。
   (1)坐標平面上，試描繪 $y=f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。(4 分)
   (2)令 $f(x)=0$ 的實根為 a_1,a_2,a_3，其中 $a_1<a_2<a_3$。
   試求 a_1,a_2,a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。(2 分)
   (3)承(2)，試說明 $f(x)=a_1$、$f(x)=a_2$、$f(x)=a_3$ 各有幾個相異實根。(4 分)
   (4)試求 $f(f(x))=0$ 有幾個相異實根(註：$f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$)。
   (2 分)　　　　【107 數甲】

答：(2) a_1 於 $-3,-2$ 之間，a_1 於 $-2,-1$ 之間，a_1 於 $0,1$ 之間　(3) 1 個；1 個；3 個　(4) 5 個

$\boxed{解}$：(1) $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)\left\langle\begin{array}{l}f(-2)=-1\\ f(0)=3\end{array}\right.$

x		-2		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

(2) $f(1)=-1$，$f(0)=3$，$f(-1)=1$，$f(-2)=-1$，$f(-3)=3$

由勘根定理得知，

在區間 $(-3,-2)$，$(-2,-1)$，$(0,1)$ 內各有一實根

$\Rightarrow -3<a_1<-2<a_2<-1<0<a_3<1$

(3) 故 $y=f(x)$ 與 $y=a_1$ 交於1點，

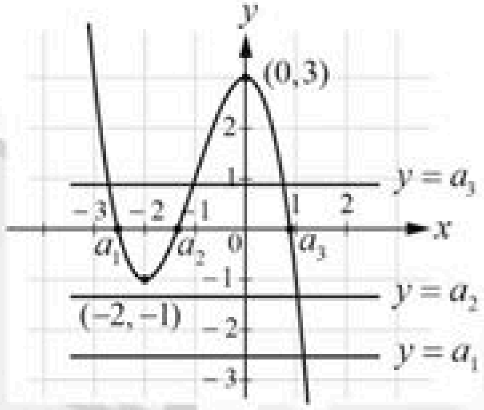
表 $f(x)=a_1$ 有一實根

與 $y=a_2$ 交於1點，

表 $f(x)=a_2$ 有一實根

與 $y=a_3$ 交於3點，

表 $f(x)=a_3$ 有三實根



(4) $f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3=0$

亦即 $f(x)=a_1$、$f(x)=a_2$、$f(x)=a_3$，承(3)，共有 5 個相異實根

2. 設 f 為實係數三次多項式函數。
已知五個方程式的相異實根個數如下表所述：關於 f 的極小值 α，試問下列哪一個選項是正確的
(1) α 不存在　(2) $-20<\alpha<-10$
(3) $-10<\alpha<0$　(4) $0<\alpha<10$
(5) $10<\alpha<20$【100 數甲】

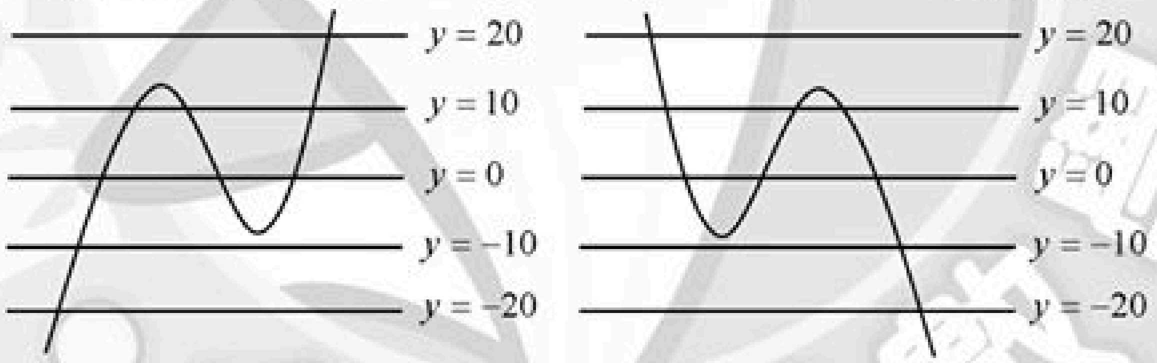
方程式	相異實根的個數
$f(x)-20=0$	1
$f(x)-10=0$	3
$f(x)=0$	3
$f(x)+10=0$	1
$f(x)+20=0$	1

$\boxed{答}$：(3)

$\boxed{解}$：五個方程式可看成

$y=f(x)$ 與五條線 $y=20$、$y=10$、$y=0$、$y=-10$、$y=-20$ 的交點個數

如圖



不論哪一種圖，都可知 $-10<\alpha<0$

3. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數，
已知 $y=f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(1,0)$ 和點 $(2,0)$ 且開口向上的拋物線。
試問下列哪些選項是正確的？
(1) $f(x)$ 一定是三次多項式　　(2) $f(x)$ 在 $1<x<2$ 的範圍內必為遞增

(3) $f(x)$ 一定恰有兩個極值　　(4) $f(x)=0$ 一定有三個實根
(5) $f(x)=0$ 在 $1\le x\le 2$ 的範圍內一定有實根【97 數甲】

答：(1)(3)

解：由題意 $f'(x)=a(x-1)(x-2)$，$a>0$

x		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(1) $\deg f'(x)=2\Rightarrow \deg f(x)=3$
(2)應為遞減
(3)極大點 $(1,f(1))$、極小點 $(2,f(2))$
(4)必須 $f(1)f(2)\le 0$，才有三個實根（含重根）
(5)當 $f(1)f(2)>0$，僅有一個實根，且應在 $x>2$ 或 $x<1$

4. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。
已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。
試選出正確的選項。
(1) $f(1)=g(1)$　(2) $f'(1)=g'(1)$　(3) $f''(1)=0$
(4)存在實數 $a\ne 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$　(5)存在實數 $a\ne 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$
【106 數甲】

答：(1)(2)(3)

解：依題意，$f(x)-g(x)=k(x-1)^3$，$k>0\Rightarrow f(1)-g(1)=0\Rightarrow f(1)=g(1)$
故 $f'(x)-g'(x)=3k(x-1)^2\Rightarrow f''(1)-g''(1)=0\Rightarrow f''(1)=g''(1)$
故 $f''(x)-g''(x)=6k(x-1)\Rightarrow f''(1)-g''(1)=0\Rightarrow f''(1)=g''(1)=0$
顯然，不存在實數 $a\ne 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$、$f''(a)=g''(a)$

例題篇：知來之對策（含 109 年最新模擬考）

1. 已知：$y=f(x)=x^3-6x^2+9x-\frac{16}{3}\sin^2\theta=0$ 有三個相異正根，又 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，
試求：θ 的範圍。

答：$0<\theta<\frac{\pi}{3}$

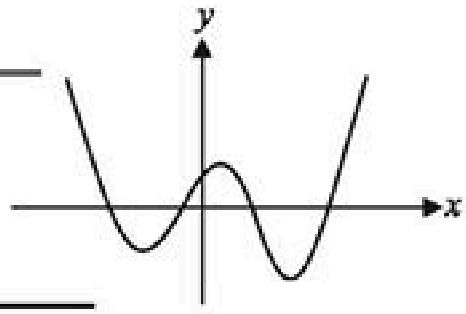
2. 已知 a、b、c 為相異實數，且 $a+b+c=1$、$ab+bc+ca=\frac{1}{4}$、$abc=k$。
試求：k 之範圍

答：$0<k<\frac{1}{54}$

3. 就 a 值決定 $f(x)=ax^3-x+a=0$ 的相異實根個數。

答：$0<a<\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 時有三相異實根；$a=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 時有二相異實根；$a\le 0$ 或 $a>\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 時有一實根

4. 若四次函數 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的圖形如右，則：
(1) $a<0$　(2) $b<0$　(3) $c<0$　(4) $d<0$
(5) $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$ 有三個相異實根。



答：(2)(3)(5)