

俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020
大學指考

丙戌(23)：黎曼和、微積分基本定理

觀念篇

已知 $f(x)$ 為閉區間 $[a, b]$ 上的連續函數，且 $f(x) \geq 0$ ，
將區間 $[a, b]$ 分成 n 等分，每等分的間隔 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 。

(1) 上和：以每等分區間中函數的最大值 M_i 為高，

作出 n 個矩形面積和 $U_n = \sum_{i=1}^n M_i \times \Delta x$ ，

稱為區域面積的上和。

(2) 下和：以每等分區間中函數的最小值 m_i 為高，

作出 n 個矩形面積和 $L_n = \sum_{i=1}^n m_i \times \Delta x$ ，

稱為區域面積的下和。

(3) 黎曼和：以每等分區間中的任一函數值 $f(t_i)$ 為高，

作出 n 個矩形面積和 $\sum_{i=1}^n f(t_i) \times \Delta x$ ，

稱為區域面積的黎曼和。

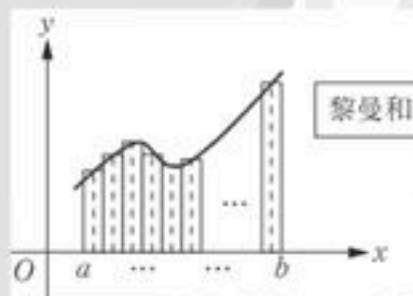
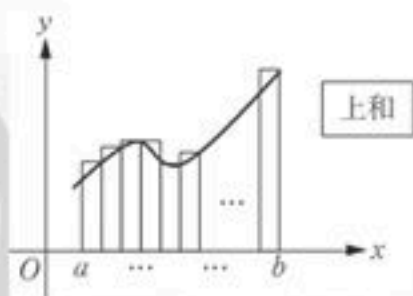
(4) 區域真實面積與上和 U_n 、下和 L_n 及黎曼和關係：

$$(i) L_n \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \times \Delta x \leq U_n$$

$$(ii) L_n \leq \text{真實面積} \leq U_n$$

(iii) 當 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數，而 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ 存在且相等時：

$$\text{真實面積} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \times \Delta x$$



定積分：

設 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數，則黎曼和的極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \times \Delta x$ ，

稱為函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定積分，以符號 $\int_a^b f(x) dx$ 表示。

其中 a 與 b 稱為此定積分的下限與上限。

微積分基本定理 I：

設 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數，而 $F(x)$ 為區間 (a, b) 上的可微分函數，

若 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ， $a < x < b$ ，則 $F'(x) = f(x)$ 。

微積分基本定理 II：

設 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的多項式函數，

若 $G'(x) = f(x)$ ，即 $G(x)$ 為 $f(x)$ 的其中一個反導函數，

則定積分 $\int_a^b f(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$

例題篇：鑑往之傾向

1. 令 $f(x) = x(x-1)(x^3 - 2)$ ，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x) dx = 0$ ？

(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 5個。【101 數甲】

答：(3)

解： $\int_0^a f'(x) dx = [f(x) + C]_0^a = f(a) - f(0) = a(a-1)(a^3 - 2) = 0$

$a = 0, 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ), \sqrt[3]{2}(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$

2. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 3，

且圖形 $y = f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x - 4) = 0$ ，

試問 $\int_1^4 f''(x) dx$ 之值為下列哪一選項？

(1) -5 (2) -3 (3) 0 (4) 3 (5) 5

【106 數甲】

答：(1)

解： $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，故 $f'(1) = 0$ 。又 $f(x)$ 在 $x=4$ 處的切線斜率 $f'(4) = -5$ 。

所求 $= [f'(x) + C]_1^4 = f'(4) - f'(1) = (-5) - 0 = -5$

例題篇：知來之對策

1. 欲求曲線 $y=4-x^2$ 與 $y=0$ 、 $x=1$ 、 $x=2$ 所圍成之區域 R 的面積，我們將區間 $[1,2]$ 分割成 n 等分 ($n \in N$)，
求出區域 R 的下和為 $a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}$ ，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\left(\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right)$

2. 由 $f(x)=x^2+1$ 的圖形、 x 軸與兩直線 $x=0$ 、 $x=2$ 所圍成的區域為 S ，將閉區間 $[0,2]$ n 等分，求 S 的面積上和 U_n 為何？

答： $\frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$