111 學年度起分科測驗
數學甲參考試題(108 課綱)

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 甲國某傳染病大流行時，經統計發現高峰期間「染病人數每三天增加一倍」。
用 $f(t)$ 表示從 $t=0$ 開始，染病人數隨時間 t 變化的函數，並假設 $f(0)=k$（k 為正整數）。
若 t 以天為單位，試選出可以代表甲國於高峰期間染病人數的函數模型。
(1) $f(t)=\frac{k}{3}t+k$　(2) $f(t)=\frac{1}{3}t^2+k$　(3) $f(t)=k\times\left(\frac{2}{3}\right)^t$　(4) $f(t)=k\times 2^{\frac{t}{3}}$
(5) $f(t)=\frac{k}{3}\times 2^t$。
【111 起分科測驗數學甲】

答：(4)

解：每 T 天增加 p 倍 $\Rightarrow f(t)=k(p+1)^{\frac{t}{T}}$

2. 在 ΔABC 中，若 $2\sin A=3\sin B=4\sin C$，則 $\angle A$ 的弧度量在下列哪一個區間內？
(1) $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　(2) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$　(3) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　(4) $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$　(5) $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$。
【111 起分科測驗數學甲】

答：(3)

解：$a : b : c \sin = A : \sin B : \sin C = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$

$$\cos A=\frac{4^2+3^2-6^2}{2\times4\times3}=\frac{-11}{24}=-0.458\cdots\cdots\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{3}<\cos A<\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}<A<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$$

3. 某城市的氣象站位於坐標原點 O，此氣象站的觀察員觀測馬力颱風的行進路線，
t 為觀測時間，單位為小時。當 $t=0$ 時，觀察到颱風中心位於點 A，其坐標為 $(600,600)$，
單位為公里，正以每小時10公里的速度，朝西偏北30° 方向等速直線前進。假設颱風中心
前進的方向與速度一直維持不變，且當 $t=a$ 時，馬力颱風中心最接近坐標原點 O，
試選出正確的選項。
(1) $18<a<23$　(2) $23<a<28$　(3) $28<a<33$　(4) $33<a<38$　(5) $38<a<43$。
【111 起分科測驗數學甲】

答：(1)

解：行進路線 L_1：$(y-600)=\frac{-1}{\sqrt{3}}(x-600)$

與 L_1 垂直，且過 $(0,0)$ 之 L_2：$y=\sqrt{3}x$

交於 $\left(150\left(\sqrt{3}+1\right),150\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$

$$a=\frac{\sqrt{\left(150\sqrt{3}-450\right)^2+\left(150\sqrt{3}-150\right)^2}}{10}=30\left(\sqrt{3}-1\right)\fallingdotseq 21.9\cdots\cdots$$

解：$A\left(600-5\sqrt{3}t,600+5t\right)$

$$\overline{OA}=\sqrt{\left(600-5\sqrt{3}t\right)^2+\left(600+5t\right)^2}$$

$$=\sqrt{100\left(t-30\sqrt{3}+30\right)^2+90000\left(4+2\sqrt{3}\right)}$$

當 $t=30\left(\sqrt{3}-1\right)$ 時，即 $a=30\left(\sqrt{3}-1\right)\fallingdotseq 21.9\cdots\cdots$ 時，$\overline{OA}$ 有 Min

二、多選題（占 40 分）

4. 下表是某國在 2009 年至 2015 年間，運動選手的人數統計：

年份	男生	女生
2009	3410	1950
2010	3420	2000
2011	3540	2240
2012	3710	2370
2013	3830	2650
2014	3920	2780
2015	3990	2860

關於該國運動選手的敘述，試根據這張表選出正確的選項。

(1)從 2009 年到 2015 年，男運動選手增加的總人數比女運動選手增加的總人數多

(2)從 2009 年到 2015 年，平均一年增加了 580 名男運動選手

(3)從 2009 年到 2015 年，每一年男女運動選手人數的差距都超過 1000 名

(4)如果分別計算男女運動選手人數對年份的最適直線（迴歸直線），則男生的直線斜率小於女生的直線斜率

(5)在 2009 年到 2015 年共 7 年中，該國平均一年有超過 6000 名運動選手。

【111 起分科測驗數學甲】

答：(3)(4)(5)

解：

年份	男增加	女增加	總人數
2009			5360
2010	10	50	5420
2011	120	240	5780
2012	170	130	6080
2013	120	280	6480
2014	90	130	6700
2015	70	80	6850
Σ	580	910	42670

5. 坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C，交直線 $x-y+1=0$ 於 Q、R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 ΔPQR 為正三角形，試選出正確的選項。

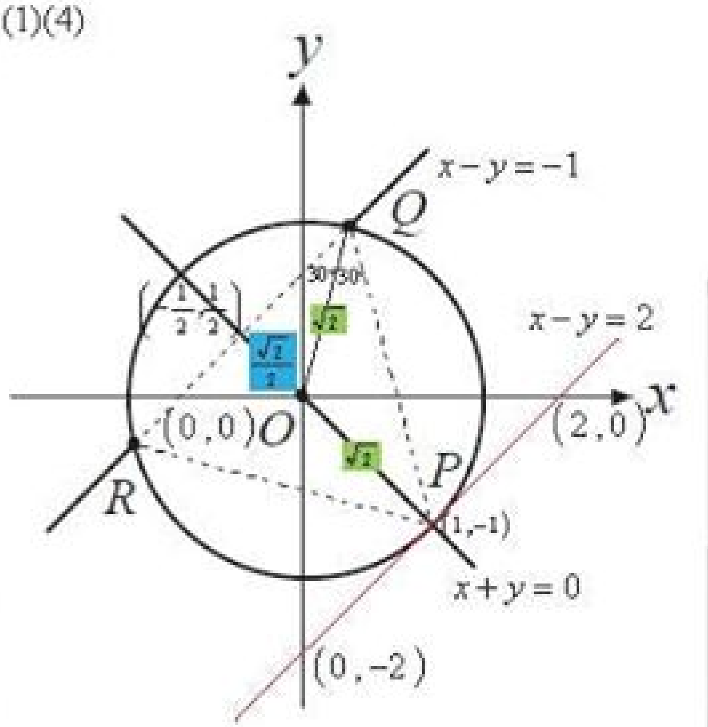
(1) O 與 P 皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上　(2) P 在第三象限　(3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

(4)圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=2$　(5)圓 C 在 P 的切線方程式為 $x-y-1=0$。

【111 起分科測驗數學甲】

答：(1)(4)

解：



6. 橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$以原點為旋轉中心，逆時針旋轉$\theta$角後，得新的橢圓$\Gamma'$。若橢圓$\Gamma'$的對稱軸為$x+y=0$與$x-y=0$，試選出可為橢圓$\Gamma'$方程式的選項。
(1) $6x^2+5xy+6y^2=8$　(2) $6x^2-5xy+6y^2=8$　(3) $6x^2-5xy+6y^2=28$
(4) $5x^2+6xy+5y^2=16$　(5) $5x^2-6xy+5y^2=16$。【111 起分科測驗數學甲】

答：(4)(5)

解：$\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

代入Γ，得出：$\dfrac{\left(\dfrac{x'}{\sqrt{2}}+\dfrac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{-x'}{\sqrt{2}}+\dfrac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}=1$

$\Rightarrow 5(x')^2-6(x')(y')+5(y')^2=16$

解：$\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

代入Γ，得出：$\dfrac{\left(\dfrac{x'}{\sqrt{2}}+\dfrac{-y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{x'}{\sqrt{2}}+\dfrac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}=1$

$\Rightarrow 5(x')^2+6(x')(y')+5(y')^2=16$

7. 某甲練習投籃，每次投一球，其進球的機率為 0.3。假設每次投球均互相獨立，試選出正確的選項。
(1)若某甲投兩球，則兩球都進的機率小於 0.3
(2)若某甲投三球，則恰進一球的機率等於恰進兩球的機率
(3)某甲投四球恰進兩球的機率與投兩球恰進一球的機率相同

(4)若某甲投 10 球，則其進球次數的期望值大於 3
(5)若某甲進球時就停止練習，則其投球次數的期望值大於 3。【111 趨分科測驗數學甲】

答：(1)(5)

解：(1)$(0.3)^2=0.09$

(2)$C_1^3(0.3)[0.7]^2 \neq C_2^3(0.3)^2[0.7]$

(3)$C_2^4(0.3)^2[0.7]^2 \neq C_1^2(0.3)[0.7]$

(4)$E(X)=10[1\times 0.3]=3$

(5)
$$\begin{array}{rl} E(Y)= & 1(0.3)+2[0.7](0.3)+3[0.7]^2(0.3)+4[0.7]^3(0.3)+\ldots \\ -)[0.7]E(Y)= & 1[0.7](0.3)+2[0.7]^2(0.3)+3[0.7]^3(0.3)+\ldots \\ \hline 0.3E(Y)= & 1(0.3)+1[0.7](0.3)+1[0.7]^2(0.3)+1[0.7]^3(0.3)+\ldots \end{array}$$

$$E(Y)=\frac{0.3}{1-0.7}\times\frac{1}{0.3}=\frac{10}{3}$$

8. 設 $f(x)=3x^2$，
並定義數列 $\langle S_n \rangle$ 如下：對每一個正整數 n，將區間 $[0,2]$ 分割成 n 等分，
且在區間 $\left[\frac{2(k-1)}{n},\frac{2k}{n}\right]$ 中任取一數 d_k $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$，
並令 $S_n=\frac{1}{n}\left(f(d_1)+f(d_2)+\cdots\cdots+f(d_n)\right)$，
試選出正確的選項。
(1) $f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 的所有函數值之平均為 8
(2) $S_1<S_2$
(3) $0\le S_5\le 6$
(4)數列 $\langle S_n \rangle$ 的每一項都是 $f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 上的黎曼和
(5)數列 $\langle S_n \rangle$ 一定收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=4$。【111 趨分科測驗數學甲】

答：(3)(5)

解：(1) $f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 的所有函數值之平均為 $\dfrac{\int_0^2\left(3x^2\right)dx}{2-0}=\dfrac{\left[x^3+C\right]_0^2}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

(2)$S_1=\frac{1}{1}\left(f(d_1)\right)=3d_1^2 \xrightarrow{0\le d_1\le 2\Rightarrow 0\le d_1^2\le 4} 0\le S_1\le 12$

$S_2=\frac{1}{2}\left(f(d_1)+f(d_2)\right)=\frac{1}{2}\left(3d_1^2+3d_2^2\right) \xrightarrow[1\le d_2\le 2\Rightarrow 1\le d_2^2\le 4]{0\le d_1\le 1\Rightarrow 0\le d_1^2\le 1} \frac{3}{2}\le S_2\le\frac{15}{2}$

不能確定 $S_1<S_2$

(3)$S_5=\frac{1}{5}\left(f(d_1)+f(d_2)+\ldots+f(d_5)\right)=\frac{3}{5}\left(d_1^2+d_2^2+\ldots+d_5^2\right)$

$$
\begin{aligned}
&0\le d_1\le\frac{2}{5}\Rightarrow 0\le d_1^2\le\frac{4}{25}\\
&\frac{2}{5}\le d_2\le\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{4}{25}\le d_2^2\le\frac{16}{25}\\
&\frac{4}{5}\le d_3\le\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{16}{25}\le d_3^2\le\frac{36}{25}\\
&\frac{6}{5}\le d_4\le\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{36}{25}\le d_4^2\le\frac{64}{25}\\
&\frac{8}{5}\le d_5\le 2\Rightarrow\frac{64}{25}\le d_5^2\le 4
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{360}{125}}_{2.88}\le S_5\le\underbrace{\frac{660}{125}}_{5.28}$$

(4) $S_n=\frac{1}{n}\left(f\left(d_1\right)+f\left(d_2\right)+\cdots\cdots+f\left(d_n\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}f\left(d_k\right)\right]\times\frac{2}{n}$

都是$\frac{1}{2}f\left(x\right)$在區間$\left[0,2\right]$上的黎曼和

(5) $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^2\left[\frac{1}{2}f\left(x\right)\right]dx=\int_0^2\left[\frac{3}{2}x^2\right]dx=\left[\frac{1}{2}x^3+C\right]_0^2=4$

三、選填題（占 18 分）

9. 在坐標平面上，定義一個坐標變換$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$代表舊坐標，$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$代表新坐標。若舊坐標為$\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$的點$P$經此坐標變換得到的新坐標為$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，則數對$\left(r,s\right)=$________。　【111 起分科測驗數學甲】

答：$\left(3,-1\right)$

解：$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\times\frac{1}{2}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$

10. 某甲的學校合作社，販售三明治有鮪魚、肉鬆、火腿與起司共四種，某甲每天到合作社買一個三明治當早餐，但他不會連續兩天買相同口味的三明治吃。已知某甲這個星期一買的是鮪魚三明治，則他從星期一至星期五把這四種三明治都吃過的方法有________種。　【111 起分科測驗數學甲】

答：36

解：$\underbrace{C_1^3}_{\text{鮪魚吃兩次則從週三四五選一日排鮪魚}}\times\underbrace{3!}_{\text{其他三種各吃一次排入剩餘3日}}+\underbrace{C_1^3}_{\text{選一種非鮪魚吃兩次}}\times\underbrace{2!}_{\text{其他兩種只吃一次先排}}\times\underbrace{C_2^3}_{\text{吃兩次的插入空隙}}=36$

11. 在所有滿足$z-\overline{z}=-3i$的複數z中（其中$\overline{z}$為z的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），

$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$的最小值為________。（化成最簡分數） 【111 起分科測驗數學甲】

答：$\dfrac{19}{2}$

解：$z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$，a、$b\in R$

$\Rightarrow z-\overline{z}=2bi=-3i\Rightarrow b=-\dfrac{3}{2}$

$$\left|\sqrt{7}+8i-a+\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{7}-a\right)^2+\left(\frac{19}{2}\right)^2}\geq\frac{19}{2}$$

第貳部分：混合題或非選題（占 24 分）

第 12 至 14 題為題組

假設某衛星在一圓形軌道上運行。今以地球的地心為原點O，地球的半徑為1單位長，建立一空間坐標系。此衛星在$y=z$平面上以O為圓心，半徑為 2 單位的圓上繞行地球運行。某一時刻有一太空人座落在坐標點$P(2,2,6)$位置。試回答下列問題。

12. 試問下列哪些點會在衛星軌道上？
(1)$\left(0,1,\sqrt{3}\right)$ (2)$(2,1,1)$ (3)$\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$
(4)$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ (5)$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$。 【111 起分科測驗數學甲】

答：(3)(4)(5)

解：$d\left((t,s,s),(0,0,0)\right)=2\Rightarrow t^2+2s^2=4$

13. 試求點P在$y=z$平面上的投影點坐標。 【111 起分科測驗數學甲】

答：$(2,4,4)$

解：P在$y=z$平面上投影點$Q(2,2+k,6-k)\in y=z$

$\Rightarrow k=2$，$Q(2,4,4)$

14. 試求衛星繞地球運行中與點P的最近距離為多少單位？ 【111 起分科測驗數學甲】

答：$2\sqrt{6}$

解：$d\left((t,s,s),(2,2,6)\right)=d\left(\left(2\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right),(2,2,6)\right)$

$$=\sqrt{(2\cos\theta-2)^2+\left(\sqrt{2}\sin\theta-2\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin\theta-6\right)^2}$$

$$=\sqrt{48-8\left(\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\right)}=\sqrt{48-24\left[\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\theta\right]}$$

$$=\sqrt{48-24\sin(\theta+\phi)}，\sin\phi=\frac{1}{3}，\cos\phi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

當$\sin(\theta+\phi)=\sin 90^\circ=1$時，有$Min=2\sqrt{6}$

等號成立於$t=2\cos\theta=2\cos(90^\circ-\phi)=2\sin\phi=\dfrac{2}{3}$

$$s=\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{2}\sin(90^\circ-\phi)=\sqrt{2}\cos\phi=\frac{4}{3}$$

即$(t,s,s)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

第 15 至 17 題為題組

坐標空間中，有一立體Γ的底面位於xy平面上，

且底面是由兩拋物線$y=x^2$與$y=8-x^2$圍成的區域，

而Γ的每一個垂直x軸的截面都是等腰直角三角形，且三角形的斜邊在xy平面上。

設每一個垂直x軸且通過$\left(t,t^2,0\right)$的截面所成等腰直角三角形面積為$A(t)$。

試回答下列問題。

15.試求此立體Γ的底面面積。【111 起分科測驗數學甲】

答：$\dfrac{64}{3}$

解：$y=x^2$與$y=8-x^2$交於$(-2,4)$、$(2,4)$

所求面積$=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left[8-2x^2\right]dx=\left[8x-\frac{2}{3}x^3+C\right]_{-2}^{2}=\frac{64}{3}$

16.試以t表示$A(t)$。【111 起分科測驗數學甲】

答：t^4-8t^2+16

解：等腰直角三角形三頂點分別為$\left(t,t^2,0\right)$、$\left(t,8-t^2,0\right)$、$\left(t,4,4-t^2\right)$

等腰直角三角形面積$A(t)=\dfrac{1}{2}\times\left(8-t^2-t^2\right)\left(4-t^2\right)=t^4-8t^2+16$

17.試證：當$0\le x\le\sqrt{2}$時，$\displaystyle\int_0^x A(t)\,dt\ge\frac{1}{5}x^5$恆成立。【111 起分科測驗數學甲】

證：$\displaystyle\int_0^x A(t)\,dt=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+16t+C\right]_0^x=\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x$

$f(x)=\displaystyle\int_0^x A(t)\,dt-\frac{1}{5}x^5=-\frac{8}{3}x^3+16x$，故$f'(x)=-8x^2+16=-8\left(x^2-2\right)$

當$0\le x\le\sqrt{2}$時，$f'(x)\ge0$，表$f(x)$遞增，又$f(0)=0$，

故$0\le x\le\sqrt{2}$時，$f(x)=\displaystyle\int_0^x A(t)\,dt-\frac{1}{5}x^5\ge0\Rightarrow$得證$\displaystyle\int_0^x A(t)\,dt\ge\frac{1}{5}x^5$