

倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

在奪標終點線等你(妳)

第 57~70 題

57. 有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (A) $AB = BA$ (B) $A^2 B = BA^2$ (C) $A^{11} B^3 = B^6 A^5$ (D) $AB^{12} = A^7$
 (E) $(ABA)^{15} = AB^{15} A$ 。

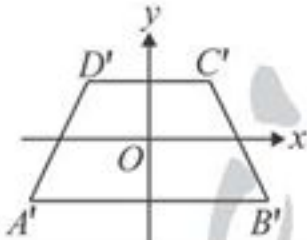
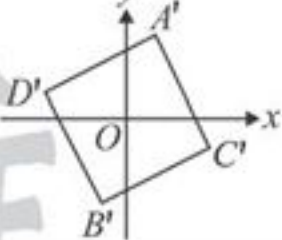
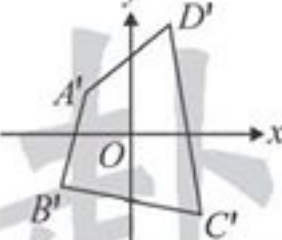
答：(B)(D)(E)

58. 坐標平面上點 $A(0,0)$ 、 $B(5,0)$ 、 $C(0,4)$ 連成直角三角形，經推移變換 $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 作用後變成等腰三角形，則下列選項中關於實數 k 的敘述哪些正確？

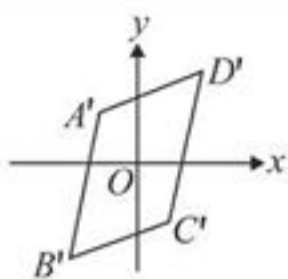
- (A) $|k| \geq \frac{1}{2}$ 必成立 (B) $|k| \leq 1$ 必成立 (C) 若 $k < 0$ 則 $k > -1$ (D) 若 $k > 0$ 則 $k < 1$
 (E) 若 k 是整數則 k 必為偶數。

答：(A)(C)(E)

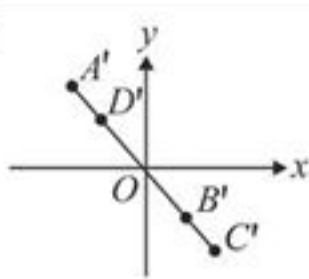
59. 坐標平面上有正方形 $ABCD$ ，已知 $A(1,1)$ 、 $B(-1,1)$ 、 $C(-1,-1)$ 、 $D(1,-1)$ ，則 $ABCD$ 經某個二階方陣做平面變換後所得的像為 $A \rightarrow A'$ 、 $B \rightarrow B'$ 、 $C \rightarrow C'$ 、 $D \rightarrow D'$ ，則 A' 、 B' 、 C' 、 D' 四點連成的圖形可為下列哪些選項？

- (A)  (B)  (C) 

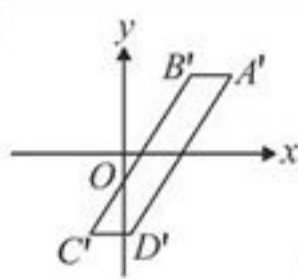
(D)



(E)



(F)



答：(D)(E)

60. 擲兩顆公正骰子，以較大的點數為隨機變數 X ，以較小的點數為隨機變數 Y ，求 X 與 Y 的機率分布表，與期望值 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $E(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，並判定標準差 σ_X 與 σ_Y 是否相等。

X	1	2	3	4	5	6
P_X						

Y	1	2	3	4	5	6
P_Y						

答： $E(X) = \frac{161}{36}$ ， $E(Y) = \frac{91}{36}$ ， $\sigma_X = \sigma_Y$

61. 某同學參加 3 門課程的考試，假設該同學第一門課程及格的機率為 $\frac{4}{5}$ ，第二門、第三門課程及格的機率分別為 p 、 q ($p > q$)，且不同課程是否及格相互獨立。令隨機變數 X 表及格課程數，其分布如右，則：

X	0	1	2	3
P_X	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

- (1) 該生至少一門課程及格的機率。 (2) p 、 q 之值。
 (3) 數學期望值 $E(X)$ 。 (4) 標準差 σ_X 。

答： (1) $\frac{119}{125}$ (2) $p = \frac{3}{5}$ ， $q = \frac{2}{5}$ (3) $E(X) = \frac{9}{5}$ (4) $\sigma_X = \frac{4}{5}$

62. 下列各選項關於隨機變數 X 及 X^2 的期望值之敘述，哪些是合理且有可能發生的？

- (A) $E(X) = -2$ (B) $E(X^2) = -1$ (C) $P(X \leq 0) = 1$ 且 $E(X) = 2$
 (D) $E(X) = 8$ 且 $E(X^2) = 50$ (E) $E(X) = 5$ 且 $E(X^2) = 80$ 。

答： (A)(E)

63. 不等式 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 的整數解的集合為 S ，且 m 表集合 S 中的元素，若隨機變數 $X = m^2$ ，則 X 的數學期望值 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： 5

64. 設 a 為正實數，由直線 $y = ax$ 與拋物線 $y = x(x-2)$ 所圍成的圖形被 x 軸分割成面積相等的兩個部分，求 a 值。

答： $a = -2 + 2\sqrt[3]{2}$

65. 設 $f(x)$ 的函數值均為正數，已知 $\int_1^5 f(x) dx = 3$ ， $\int_1^5 (f(x))^2 dx = 7$ ，求 $y = f(x) + 2$ 在 $1 \leq x \leq 5$ 的範圍內與 x 軸圍成的區域，繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積為_____。

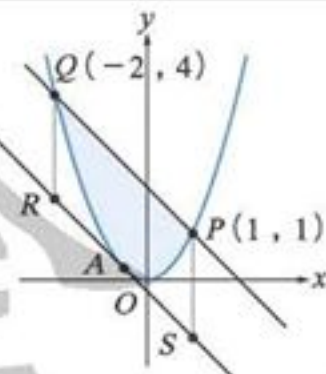
答： 35π

66. 自曲線 $y = x^3 - 4x$ 上一點 $(-1, 3)$ ，作直線 L 與曲線相切，求 L 與曲線 $y = f(x)$ 所圍區域之面積為_____。

答： $\frac{27}{4}$

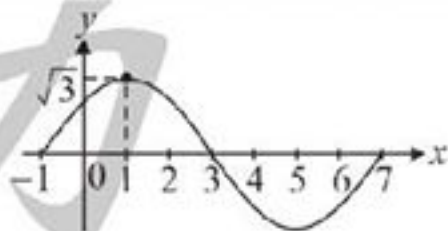
67. 如右圖，拋物線 $y = x^2$ 上兩點 $P(1, 1)$ 、 $Q(-2, 4)$ ，試求：

- (1) 陰影區域的面積為_____。
 (2) 與直線 PQ 平行的切線 L 之方程式為_____。
 (3) 平行四邊形 $PQRS$ 的面積為_____。



答： (1) $\frac{9}{2}$ (2) $4x + 4y + 1 = 0$ (3) $\frac{27}{4}$

68. 如圖，正弦函數 $y = A \sin(Bx + C)$ ，其中 $A > 0$ ， $B > 0$ ， $0 \leq C \leq \frac{\pi}{2}$ ，分別求 A 、 B 與 C 的值。



答： $A = \sqrt{3}$ ， $B = \frac{\pi}{4}$ ， $C = \frac{\pi}{4}$

69. 下列哪一個方程式有最多的實根？

- (A) $\log x - 2 = \sin x$ (B) $\log x - 1 = \sin x$ (C) $\log x = \sin x$ (D) $\log x + 1 = \sin x$
 (E) $\log x + 2 = \sin x$ 。

答： (A)

70. 對於不等式關係的推論，下列哪些選項為正確？

- (A) 若 $\sin x > x^2$ ，則 $x > 0$ (B) 若 $\sin x > x^2$ ，則 $x < 1$ (C) 若 $\cos x > x^2$ ，則 $x > 0$
 (D) 若 $\cos x > x^2$ ，則 $x < 1$ (E) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\tan x > x^2$ 。

答： (A)(B)(D)(E)