倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

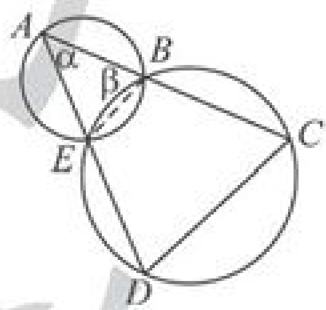
在奪標終點線等你(妳)

第 85~98 題

85. 設a為一負整數，若x的一元三次方程式$f(x)=2x^3-(2a+1)x^2+(a+2)x-1=0$有一正有理根$q$與兩個虛根$\alpha$、$\beta$，則：
(1)$1<q<2$　(2)$a+2q=0$　(3)$\overline{\alpha}=\beta^2$（$\overline{\alpha}$為$\alpha$的共軛複數）
(4)滿足$f(x)\geq 0$的最小實數為$\frac{1}{2}$　(5)$\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}+1=0$。

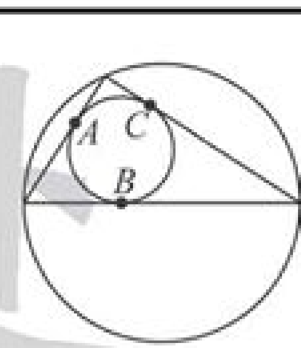
答：(2)(4)(5)

86. 如圖，有大、小兩圓交於B、E兩點，連接$\overline{BE}$，A點在小圓上，兩直線$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AE}$分別交於大圓於C、D，連接$\overline{CD}$，已知$\overline{BE}=5$、$\overline{DE}=13$，設$\angle BAE=\alpha$、$\angle ABE=\beta$，α、β均為銳角，且$\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\sin\beta=\frac{12}{13}$，
試回答下列選項何者正確？
(1)$\sin\angle BED=\frac{63}{65}$　(2)$\cos\angle BED=\frac{16}{65}$　(3)$\overline{BD}=6\sqrt{6}$
(4)小圓半徑為$\frac{25}{6}$　(5)大圓半徑為$\frac{65\sqrt{226}}{126}$。



答：(1)(4)(5)

87. 如圖，坐標平面上有一個三角形，三角形內有一內切圓，三角形外有一外接圓，已知內切圓與三角形相切於$A(6,8)$、$B(10,0)$、$C(13,9)$三點，下列敘述何者正確？
(1)內切圓的圓心為$(10,5)$
(2)過C點且與內切圓相切的直線方程式為$3x+4y-75=0$
(3)三角形的面積為150
(4)外接圓直徑為20



(5)外接圓方程式為$\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+y^2=\frac{625}{4}$。

答：(1)(2)(3)(5)

88.坐標平面中，試問下列哪一個向量不能表示成向量$\overrightarrow{a}=(1,1,1)$與$\overrightarrow{b}=(4,3,2)$的線性組合？

(1)$(0,0,0)$ (2)$(9,8,7)$ (3)$(9,7,8)$ (4)$(7,8,9)$ (5)$(4,3,2)$。

答：(3)

89. 關於平面E：$x+y-z=1$，直線：L_1：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$，

L_2：$\frac{x-8}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-8}{1}$，$L_3$：$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{1}$，下列敘述哪些正確？

(1)L_1、L_2為相交兩直線 (2)直線L_2平行平面E

(3)若一平面E_1包含直線L_1與L_3，則$(5,1,7)$為平面E_1的一個法向量

(4)若一平面E_2包含直線L_2且平行L_1，則平面E_2必平行選項(3)中的平面E_1

(5)若點P在直線L_1上，且點Q在直線L_2上，則$\overline{PQ}$的最短距離為$5\sqrt{3}$。

答：(4)(5)

90. 已知$\overrightarrow{a}\times\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=(3,10,-15)$、$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(8,4,-6)$及$\overrightarrow{b}=(2,2,4)$，求由$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$三向量所展開的平行六面體體積=________。

答：34

91.二階方陣$A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，滿足$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$的所有序組

(x,y,z)在空間坐標中形成一條直線，此直線方程式為$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-z_0}{b}$，

試求$x_0+z_0+a+b=$________。

答：6

92. 數學課老師用取球方式進行遊戲，由同學從裝有相同材質的紅球m顆與白球n顆（m、n皆為正整數）的不透明箱中取球，規定「每局」為連續取球兩次，每次取出一球記錄顏色後放回箱中（每次取球結果互相獨立且每一球被取出的機率相等）。每一位同學玩遊戲最多三局，過程中，若某局取出兩球為同色球即「失敗」且結束該次遊戲換下一位同學；若連續三局皆取出相異色球，則此同學遊戲「成功」，請選出正確的選項：

(1)當$m=2$，$n=3$時，玩一次遊戲成功的機率為$\left(\frac{6}{25}\right)^3$

(2)不論箱中裝有多少顆球，玩一次遊戲成功的機率不大於$\frac{1}{8}$

(3)當$|m-n|$（紅白球數差距）愈大，玩一次遊戲成功的機率愈小

(4)當$m=n$時，連續60位同學玩遊戲全都失敗的機率為$\dfrac{7^{60}}{2^{180}}$

(5)可以找到適當的(m,n)，讓連續玩遊戲60次全都失敗機率大於$\dfrac{1}{2}$。

答：(2)(4)(5)

93. 某商店舉行滿額抽獎促銷活動，顧客購買金額滿1000元，可根據下列方案甲抽獎一次。或顧客購買滿1500元，可根據方案乙抽獎一次，(例如：某顧客購買商品為2600元，則有三種抽獎方式可以選擇，分別為：根據方案甲抽兩次，或根據方案乙抽一次，或選方案甲乙各一次)，又抽獎的兩方案分別為：
方案甲：從裝有2個紅球，3個白球（僅顏色不同）的袋中隨機抽出2球，若都是紅球，可得獎金300元，否則沒有獎金。兌換後，球要放回甲袋中。
方案乙：從裝有3個紅球，2個白球（僅顏色不同）的袋中隨機抽出2球，若都是紅球，可得獎金150元，否則沒有獎金。兌換後，球要放回乙袋中。
若張太太到此商店購買商品金額為3500元，試問她抽獎所得獎金的期望值最多是______元。

答：105

94. 複數z_1、z_2，滿足$|z_1|=|z_2|=1$，$z_1-z_2=\dfrac{2-4i}{2+i}$，則$z_1\cdot z_2=$？
(1)0　(2)i　(3)$-i$　(4)1　(5)-1。

答：(4)

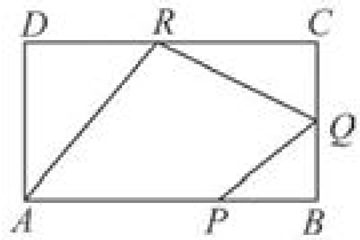
95. 在坐標平面上，設n為正整數，且直線L_n：$x=\sqrt{3}n$與$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$的圖形交點為$A_n$。
若m_n表示直線A_nA_{n+1}的斜率，則下列哪些選項是正確的？
(1)$m_1>0$　(2)$m_1<-1$　(3)$m_1<m_2$　(4)$\overline{A_1A_2}<\overline{A_2A_3}$　(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=\sqrt{3}$。

答：(3)(5)

96. 設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$為$n$次實係數多項式，則下列敘述哪些正確？
(1)若$\dfrac{h}{m}$為方程式$f(x)=0$的有理根，則m是a_n的因數，h是a_0的因數
(2)若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}$存在，則$x-1$為$f(x)$的因式
(3)若$n=5$，則$f(x)$的圖形最多有3個反曲點
(4)若$n=7$，則$f(x)$至少有一個極值點
(5)若$f(x)$為嚴格遞增函數，則$f'(x)=0$沒有實根。

答：(2)(3)

97. 在長方形$ABCD$中，$\overline{AB}=9$，$\overline{AD}=5$，分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$邊上取P、Q、R三點（這三點可以是長方形的頂點），使得$\begin{cases}\overline{CQ}^2=2\overline{BP}\\ \overline{CR}=2\overline{BQ}\end{cases}$，如右圖所示，試求：



(1) $\overline{CQ}$長度範圍。

(2) 當$\overline{CQ}$長度多少時，四邊形$APQR$面積有最小值；
當$\overline{CQ}$長度多少時，四邊形$APQR$面積有最大值。

答：(1) $\frac{1}{2}\le\overline{CQ}\le 3\sqrt{2}$　(2) 4；$\frac{1}{2}$

98. 已知兩拋物線Γ_1：$y=x(x-2)$，Γ_2：$y=-x(x-6)$，則：

(1) 設p為拋物線Γ_1外一點，已知過p且與Γ相切之二直線斜率分別為-2與4，求p點坐標為何？

(2) 設兩拋物線Γ_1、Γ_2所圍成之區域的面積為Ω，試求Ω的面積為何？

(3) 承(2)，若$y=kx$將Ω分成面積相等的兩塊區域，試求k的值為何？

答：(1) $\left(\frac{3}{2},-3\right)$　(2) $\frac{64}{3}$　(3) 2