倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

在奪標終點線等你(妳)

第 99~112 題

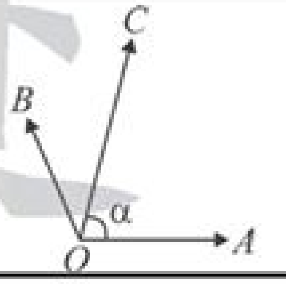
1. 設實數函數 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+n}{x^2+2}$ 之最大值與最小值分別為 a_n 和 b_n，則下列哪些選項正確？
(1) $a_n+b_n=\dfrac{n+3}{2}$　(2) $a_n\cdot b_n=\dfrac{n-4}{2}$　(3) $(a_n-1)(b_n-1)=-2$
(4) $\sum\limits_{n=1}^{10}(a_n+b_n)=\dfrac{85}{2}$　(5) $\sum\limits_{n=1}^{10}(a_n\cdot b_n)=\dfrac{25}{2}$。

答：(2)(3)

2. 請選出正確的選項。
(1) 兩個非零向量 $\overline{a}$，$\overline{b}$ 必符合：$\left|\overline{a}\cdot\overline{b}\right|\le\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|$
(2) 兩個非零向量 $\overline{a}$，$\overline{b}$ 必符合：$\left|\overline{a}+\overline{b}\right|^2\ge\left|\overline{a}\right|^2+\left|\overline{b}\right|^2$
(3) $\left(\left|\overline{b}\right|\overline{a}+\left|\overline{a}\right|\overline{b}\right)$ 之向量可以平分 $\overline{a}$，$\overline{b}$ 兩向量之夾角
(4) $\left(\dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}+\dfrac{\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}\right)$ 之向量可以平分 $\overline{a}$，$\overline{b}$ 兩向量之夾角
(5) 已知 a,b,c,d 為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=4$，則 $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge 16$

答：(1)(3)(4)(5)

3. 如右圖，在同一平面上，向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 的長度分別為 1、1、$\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 的夾角為 α，且 $\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 的夾角為 45°，若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 m、n 為實數，則 $m+n=$
(1) 3　(2) 4　(3) 5　(4) 6　(5) 7。



答：(1)

4. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$。

若 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16 & \alpha & \beta \\ \alpha & 9 & -3 \\ \beta & -3 & 4 \end{bmatrix}$，其中 α、β 皆為實數，則下列敘述哪些正確？

(1)向量 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角為 150°　(2)向量 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{c}$ 平分 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 的夾角　(3) $\left|\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}\right|=3$

(4)當 $\alpha=\beta=0$ 時，則 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 三向量所展成的四面體體積為 $4\sqrt{3}$

(5)三向量 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$、$-2\overrightarrow{c}$ 及 $\overrightarrow{b}-4\overrightarrow{c}$ 所展成的平行六面體體積的最大值為 $72\sqrt{3}$。

答：(2)(5)

5. 設二次曲線 Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$，以矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ 對 Γ 作線性變換得 Γ'，

即 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，其中 a 為實數，$(x,y)\in\Gamma$，$(x',y')\in\Gamma'$，則：

(1)當 Γ' 與 x 軸相切時，$a=$________。

(2)承(1)，試求切點坐標________。

答：(1) $\pm\sqrt{5}$　(2) $\left(\pm 2\sqrt{5},0\right)$

6. 設 $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $A=aB+C$（a 為實數），若 A 表逆時針繞原點旋轉 θ 之旋轉矩陣，則下列選項哪些正確？

(1) $a=-\frac{2}{5}$　(2) $\tan\theta=\frac{4}{3}$　(3) $\frac{\left(C^2+C^{-1}\right)^2}{4}$ 為一轉移矩陣　(4) AC^2 為一鏡射矩陣

(5) A^2C 為一旋轉矩陣。

答：(1)(3)

7. 設點 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，……，$A_n(x_n,y_n)$，滿足下列線性變化：

$$\begin{cases} x_n=\frac{\sqrt{3}}{3}x_{n-1}+\frac{1}{3}y_{n-1} \\ y_n=\frac{-1}{3}x_{n-1}+\frac{\sqrt{3}}{3}y_{n-1} \end{cases}$$

，$n\geq 2$，n 為正整數，且 $A_1(x_1,y_1)$ 為 x 軸上的點 $(3,0)$。

設二階方陣 T 滿足 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$，令 O 為原點，$\overline{OA_n}$ 表示原點 O 與點 A_n 連線的長度，S_{n-1} 表 $\Delta OA_{n-1}A_n$ 的面積，則下列敘述哪些正確？

(1)$T^{-1}=\frac{4}{9}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$ (2)$\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}}=\frac{4}{9}$ (3)$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{27}{10}$

(4)二階行列式值$\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_6 & y_6\end{vmatrix}$的絕對值為$\frac{128}{243}$

(5)令$M=3T$，則$65\left(M+M^7+M^{13}+M^{19}+M^{25}\right)=aM$，

則實數a的整數部分為9位數。

$\boxed{答}$：(3)(4)

8. 近年來臺灣空氣品質問題日趨嚴重，其中又以$PM\ 2.5$對人體影響最甚（$PM\ 2.5$是指其懸浮微粒「小於或等於2.5微米（μm）」的粒子）。故環保局明訂規範，現今流行的路跑活動，若遇活動當天空氣品質$PM\ 2.5$為「紫爆」等級（屬於第10級的狀況，$PM\ 2.5$在每立方公尺有71微克以上），必須立刻停辦路跑活動。某行銷公司將於本週六辦理路跑活動，先前已決議若遇「紫爆」則活動延期至週日，週日再遇「紫爆」此路跑賽事便取消。行銷公司推算，若活動如期舉辦可獲利10萬元，週日舉辦獲利僅剩6萬元，活動完全取消公司將虧損2萬元。已知本週六、日兩天空氣品質$PM\ 2.5$為「紫爆」的機率皆為p，則此行銷公司辦理週末路跑活動獲利的期望值為何？（單位：萬元）

(1)$-8p^2-4p+10$ (2)$-8p^2+20p-2$ (3)$4p^2+4p-10$ (4)$-18p-16$
(5)$-6p+10$。

$\boxed{答}$：(1)

9. 設$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos 2x}$，$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos 2x}$，而$h(x)=f(x)+g(x)$，
對於x為實數，則下列選項哪些正確？

(1) $y=f(x)$之週期為π (2) $y=g(x)$之週期為$\frac{\pi}{2}$

(3) $y=h(x)$之週期為$\frac{\pi}{2}$ (4) $y=f(x)$之極大值為1

(5) $y=h(x)$之極小值為0

$\boxed{答}$：(1)(3)(4)

10. 設$f(x)=x\cdot\cos x$，$x\in R$，則下列選項哪些正確？

(1)函數$y=f(x)$的圖形對稱原點$(0,0)$ (2)對任何實數x，$|f(x)|\le|x|$均成立

(3)函數$y=f(x)$的圖形與x軸有無窮多個交點，且任意相鄰兩點的距離相等

(4)函數$y=f(x)$的圖形與直線$y=x$有無窮多個交點，且任意相鄰兩點的距離相等

(5)當常數k滿足$|k|>1$時，函數$y=f(x)$的圖形與直線$y=kx$只有一個交點。

$\boxed{答}$：(1)(2)(4)(5)

11. 設 $a=\sqrt{3}\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$，$b=\sec 80^\circ-\sqrt{3}\csc 80^\circ$，$c$ 為 $|\sin x|+|\cos x|$ 的最大值，且 e 為 $f(x)=5\sin x-12\cos x$（$0\le x\le \pi$）的最大值，此時 x 為 d，則下列選項各數值中何者最小？

(1)$\left(\frac{1}{2}\right)^e$　(2)$\tan d$　(3)$\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(4)$\log_{64}\frac{1}{b}$　(5)a。

答：(2)

12. 設 z_1、z_2、z_3 為複數，$\omega=1+i$，已知 $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$0\le\theta<2\pi$，$|z_2-z_1|=1$，$z_3=k\omega+4$，$k\in R$，下列選項哪些正確？

(1)$|z_1|=1$　(2)$|z_2|\ge 1$　(3)$|z_1-\omega|$ 的最大值為 $\sqrt{2}+1$　(4)$|z_3-\omega|$ 的最小值為 $2\sqrt{2}$

(5)$|z_2-z_3|$ 的最小值為 $2\sqrt{2}-1$。

答：(1)(3)(4)

13. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式函數，滿足：

Ⅰ. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+\sqrt{2}}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-4$；

Ⅱ. $f(x)$ 在 $x=\alpha$、$x=\beta$ 有極值，其中 $\alpha<\beta$，且兩點 $(\alpha,f(\alpha))$、$(\beta,f(\beta))$ 對稱於點 $(1,\gamma)$。

則下列選項何者正確？

(1)$\alpha=-1$　(2)$\beta=4$　(3)$\gamma=6$　(4)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2h)-f(h)}{h}=12$

(5)若過點 $(1,\gamma)$ 且與 $y=f(x)$ 相切之切線與 x 軸正向之交角為 θ，則 $\tan\theta=-4$。

答：(4)

14. 已知 $f(x)=3x^2-2x\int_1^2 f(x)dx+1$ 為一實係數多項式，則 $\int_0^1 f(x)dx=$ ________。

答：0