

倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

在每標終點線等你(妳)

第 113~126 題

1. 在 $\triangle ABC$ 中，若 a 、 b 和 c 分別為三內角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，則 $\angle A = 60^\circ$
 (2) 若 $a^2 + b^2 > c^2$ ，則 $\triangle ABC$ 為銳角三角形
 (3) 若 $2a \cdot \cos B = c$ ，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形
 (4) 若 $\sin 2A = \sin 2B$ ，則 $\triangle ABC$ 為等腰三角形
 (5) 若 $a^2 + b^2 < c^2$ ，則 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形。

答：(3)(5)

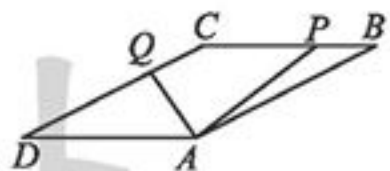
2. 若點 $P(a, b)$ 是圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的動點，點 $Q(c, d)$ 是圓 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 上的動點，則下列敘述哪些正確？

- (1) $a(c-3) + b(d-4)$ 的最大值是 2 (2) $ab + (c-3)(d-4)$ 的最大值是 4
 (3) $ac + bd$ 的最大值是 6 (4) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的最大值是 7
 (5) $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最大值是 8。

答：(1)(4)

3. 如圖，已知平行四邊形 $ABCD$ 邊長 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 3\sqrt{3}$ ， $\angle BAD = 150^\circ$ ，又 P 、 Q 分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上，且 $\overline{BC} = 3\overline{BP}$ ， $\overline{CQ} = t\overline{CD}$ 。

- (1) 若將向量 \overrightarrow{AP} 以向量 \overrightarrow{AB} 及 \overrightarrow{AC} 表示，即 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ，則 a 、 b 之值為何？並利用 t 將 \overrightarrow{AQ} 以向量 \overrightarrow{AB} 及 \overrightarrow{AC} 表示。
 (2) 承第(1)題，若 $\angle PAQ = 90^\circ$ ，此時 t 之值為何？
 (3) 承第(2)題，求此時 $\triangle APQ$ 之面積。



答：(1) $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

4. 右圖 $ABCD-EFGH$ 是一個長方體，

直線 \overleftrightarrow{AC} 的方程式是 $L_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$,

直線 \overleftrightarrow{FH} 的方程式是 $L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$,

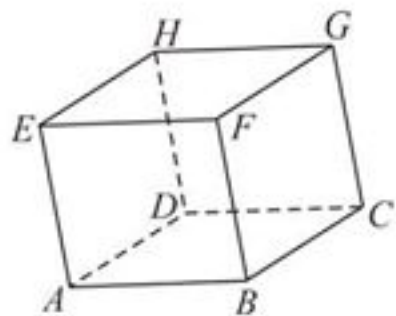
且點 $A(3, -1, 2)$, 令線段 \overline{AC} 的中點為 M ,

線段 \overline{FH} 的中點為 N , 求：

(1) M 、 N 的坐標是？

(2) $\sin \angle AMB = ?$

(3) 長方體 $ABCD-EFGH$ 的體積是？



答：(1) $M(1, 1, 1)$ 、 $N(1, 2, 3)$ (2) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ (3) $15\sqrt{6}$

5. 設三平面 $E_1 : 2x + y - z = 5$, $E_2 : 2x + 3y + z = 11$, $E_3 : x + 2y + z = k$

交於一直線 L , 求：

(1) 實數 k 值？ (2) 求點 $A(5, 0, 8)$ 到直線 L 的最短距離？

答：(1) $k = 7$ (2) $\sqrt{14}$

6. 設 $\vec{u} = (a, b, 0)$ 、 $\vec{v} = (c, d, 1)$ 、 $\vec{w} = (x, y, 0)$ 為空間中三個向量，

a 、 b 、 c 、 d 為正實數，且向量 \vec{w} 與向量 $\vec{u} \times \vec{v}$ 平行。若 $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{v}| = 2$,

行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 2c & 2d & 1 \\ 3x & 3y & 0 \end{vmatrix} = 144$, 則 $|\vec{w}| = \underline{\hspace{2cm}} |\vec{u} \times \vec{v}|$ 。

答：4

7. 假設某城鎮及其郊區的人口遷移狀況為：

每年住在城裡的人有 $\frac{5}{6}$ 留在城裡，有 $\frac{1}{6}$ 流向郊區；

而郊區的人留在郊區與搬到城裡的機率各一半。

今 P_n 表示 n 年以後城裡人口所佔的比例，若現在城裡與郊區的人口各佔一半，

求滿足 $\left| P_n - \frac{3}{4} \right| \leq 10^{-7}$ 時 n 的最小值是_____。

(已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$)

答：14

8. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ， $ab < 0$ 且矩陣 A^3 為一轉移矩陣。

(1) a 、 b 之值為何？

(2) 已知平面三點 $P(1, 0)$ 、 $Q(2, 4)$ 、 $R(-2, 3)$ ，當經過方陣 A 定義的線性變換，可將 P 映射到 P' ， Q 映射到 Q' 且將 R 映射到 R' ，試求 $\Delta P'Q'R'$ 的面積。

答：(1) $a = -\frac{1}{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{15}{2}$

9. 平面上，兩相異直線方程式 $L_1: 2x + y = 3$ ， $L_2: x + y = 1$ 經由線性變換 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，

分別換成 L'_1 及 L'_2 。

(1) 求 L'_1 的方程式。 (2) 若 L'_1 和 L'_2 的夾角 α ，求 $\sin \alpha = ?$

答：(1) $x + y = 6$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 公司辦理年終抽獎活動，箱中準備有 10 個大小相同的球，其中 5 個白球、5 個紅球。可選擇甲或乙兩種遊戲規則。甲：一次隨機取出 3 球；乙：一次隨機取出 1 球，取後放回，連續取 3 次。若共抽出 1 顆紅球，可得獎金 1000 元；

2 顆紅球，可得獎金 3000 元；3 顆紅球，可得獎金 6000 元。

則關於此兩種規則獎金期望值的敘述，請選出正確的選項：

(1) 兩者的獎金期望值相同

(2) 甲的獎金期望值大於乙的獎金期望值，差距小於 100 元

(3) 甲的獎金期望值大於乙的獎金期望值，差距大於 100 元

(4) 甲的獎金期望值小於乙的獎金期望值，差距小於 100 元

(5) 甲的獎金期望值小於乙的獎金期望值，差距大於 100 元。

答：(4)

11. 設 $0 < \theta < \pi$ ， $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ 且 $\sec \theta$ 、 $\csc \theta$ 是 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的兩根，

請問下列敘述哪些是正確的？

(1) $|a| \leq \frac{1}{2}$ (2) 若 $a < 0$ ，則 $b > 0$ (3) $a^2 + b^2 \leq \frac{9}{4}$

(4) b 的值可能小於 0 (5) $b^2 \leq 2$ 。

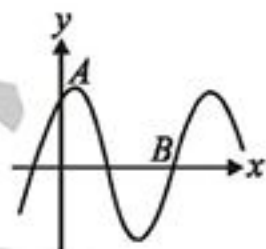
答：(1)(3)(4)(5)

12. 右圖為 $y = a \sin kx + b \cos kx$ 的函數圖形， a 、 b 、 k 為正實數。

$A\left(\frac{\pi}{24}, 4\right)$ 為圖形的最高點， $B\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 為圖形和 x 軸的交點，

若 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，則所有滿足 $\tan \theta = \frac{ab}{k}$ 的 θ 值總和為_____。

(化成最簡分數)



答： $\frac{5\pi}{3}$

13. 同時滿足 $z - \bar{z} = 8i$ (其中 \bar{z} 為 z 的共軛複數, $i = \sqrt{-1}$) 及 $|z - (3 + 5i)| = 1$ 的複數 z , 試問 z 的絕對值 $|z| =$ _____。

答： 5

14. 設 $f(x)$ 是一實係數三次多項式。

(1) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 處有極值, 且 $y=f(x)$ 的圖形在反曲點的切線斜率為 -3 , 試求 $f'(x)$ 。

(2) 若 $f(x)$ 又滿足 $\int_1^3 f(x) dx = 0$, 試求 $f(x)$ 。

答： (1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

全神貫注 全力以赴

克斌