倒數14天 衝刺200題

俞克斌老師

在奪標終點線等你(妳)

第 127~140 題

1. 若 $x=a$ 爲 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的實數解，

設 $f(x)=\left|x-\log_{\frac{1}{3}}(a+1)\right|+\left|x-\log_{\frac{1}{2}}(a+1)\right|+\left|x-\log_{\frac{1}{2}}2\right|$ 的最小值爲 m，

請選出正確的選項：

(1)$m=f(-1)$　(2)$m>\log_{\frac{1}{2}}(a+1)+1$　(3)$m>\log_{\frac{1}{3}}(a+1)+1$　(4)$m<0$　(5)$m>3$。

答：(2)

2. 若 p、q 皆爲負整數，且多項式 x^4+px^3+qx+4 恰有兩個相異的整係數一次因式，則 $(p,q)=$________。

答：$(p,q)=(-4,-1)$

3. $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 爲空間中三個非零且兩兩不平行的向量，設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角爲 θ，下列哪些選項是正確的？

(1) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$　(2)若 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|<\vec{a}\cdot\vec{b}$，則 $\theta>45°$

(3)必存在實數 x、y，使 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$　(4)若 $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，則 $\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

(5)若 $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|$，則 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$。

答：(1)(4)(5)

4. 若三平面 $\begin{cases} E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 將空間分割成六個區域，已知 $d_1d_2d_3\neq 0$，

且點 $P(1,1,1)$ 都在此平面上，則下列哪些選項是正確的？

全神貫注 全力以赴 克斌

(1)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$恰一組解

(2)行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+d_3 \end{vmatrix}$之值必為0

(3)方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$中的三個平面也將空間分成六個區域

(4)若$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$的解，

則$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$為$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$的解

(5)若$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$的解，

則$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$為方程組$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=a_1+b_1+2c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=a_2+b_2+2c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=a_3+b_3+2c_3 \end{cases}$的解。

答：(2)(3)(4)

5. (1)求以直線L：$x-2y=0$為鏡射軸的鏡射矩陣。
(2)已知a、b、c、d皆為實數，若a、b滿足$|a|+|b-2|=3$，
且c、d滿足$\begin{cases} 5c=3a+4b \\ 5d=4a-3b \end{cases}$，求$(a-c)^2+(b-d)^2$的最大值。

答：(1)$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (2)80

6. 爸爸透過遊戲方式決定兩兄弟每週零用錢的金額，兄弟兩人一組，拿到的零用錢再平分，「再玩一次」遊戲規則如下：
兄弟兩人手上各有一個袋子，哥哥的袋中有2紅球1白球，弟弟的袋中有1紅球1白球1黑球。先由哥哥隨機從自己的袋中一次任取2球放入弟弟的袋中，弟弟再從自己的袋中一次

全神貫注 全力以赴 克斌

任取3球。若拿到三個完全同色的球，爸爸就給他們1200元再平分；若拿到三個完全異色的球，就給他們900元再平分；若其他情況就給他們600元再平分。設隨機變數X是每玩一次遊戲後爸爸給他們的零用錢金額（兄弟的總和），且每週遊戲結果是獨立事件：

(1)試求X的期望值。

(2)試求連續三週，恰好兩週拿到900元的機率。

(3)已知連續兩週兄弟總共得1800元，則兩週都拿到900元的機率爲何？

答：(1) 730 (2) $\dfrac{2299}{9000}$ (3) $\dfrac{121}{157}$

7. 一袋中有N個球，其中有K個相同的紅球，其他皆爲相同的白球，自袋中隨機抽取n個球，現有兩種取球方式：

方法①：一次取一球，每次取完後放回，共抽n個球。

方法②：一次抽取n個球。

設隨機變數X爲抽出的n個球中，紅球的個數，其中$n \le K$且$n \le N-K$，求下列各小題：

(1)方法①及方法②中，隨機變數X的機率質量函數分別爲$f(x)$與$g(x)$，求$f(x)$與$g(x)$。（可用C_k^n，P_k^n，n^m等符號表示）

(2)若依方法①的方式取球，則當$(n,K,N)=(6,12,18)$時，取出紅球個數的期望值爲何？

(3)已知等式$C_k^{p+q}=C_0^pC_k^q+C_1^pC_{k-1}^q+C_2^pC_{k-2}^q+\cdots\cdots+C_k^pC_0^q$對於任意滿足$k \le p$且$k \le q$的正整數$k$恆成立，請根據此恆等式與(1)中的$g(x)$證明：

方法②中，隨機變數X的期望值爲$n\times\dfrac{K}{N}$。

（提示：當m、k爲正整數時，

$$k\cdot C_k^m=k\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}=m\cdot\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}=m\cdot C_{k-1}^{m-1}\text{）}$$

答：(1) $f(x)=P(X=x)=C_x^n\left(\dfrac{K}{N}\right)^x\left(1-\dfrac{K}{N}\right)^{n-x}$，$x=0$，1，2，……，$n$

$g(x)=P(X=x)=\dfrac{C_x^KC_{n-x}^{N-K}}{C_n^K}$，$x=0$，1，2，……，$n$

(2) 4 (3)略

8. 函數$f(x)=a\sin(bx)$（$a>0$且$b>0$）的圖形中，若取相鄰的兩個最高點及一個最低點，可形成正三角形，則ab之值最接近下列哪一個數？

（$\sqrt{2}\approx1.414$、$\sqrt{3}\approx1.732$、$\sqrt{5}\approx2.236$、$\pi\approx3.14$）

(1) 2.6 (2) 2.7 (3) 2.8 (4) 2.9 (5) 3.0。

答：(2)

9. 已知函數$f(x)=\left(k+4\sin^2x\right)\cos(2x+\theta)$爲奇函數，且$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=0$，其中$k\in R$，$-2\pi<\theta<-\pi$：

(1)求k、θ的值。

(2)若$-\pi<\alpha<\pi$，$f\left(\dfrac{\alpha}{8}\right)=\dfrac{3}{5}$，求$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值。

答：(1) $k=-2$、$\theta=-\dfrac{3\pi}{2}$　(2) $\dfrac{24\sqrt{3}-7}{50}$

10. 在複數平面上：

(a)以三個複數0、8、$\left(1+\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$爲頂點的三角形面積爲$p$

(b)以$4+4\sqrt{3i}$的三次方根爲三個頂點的三角形面積爲q

(c)設複數z_1、z_2滿足$\left|z_1-z_2\right|=3\sqrt{2}$且$\dfrac{z_1}{z_2}=i$，以0、$z_1$、$z_2$爲頂點的三角形面積爲$r$

下列選項何者正確？

(1)$p<q<r$　(2)$q<p<r$　(3)$r<q<p$　(4)$q<r<p$　(5)$p<r<q$。

答：(5)

11. z_1、z_2均爲複數，$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=1$且$z_1$、$z_2$之主幅角分別爲$\dfrac{\pi}{6}$及$\dfrac{7\pi}{12}$，

則$\left(z_1+z_2\right)^3$之主輻角最靠近下列何者？

(1)$\dfrac{\pi}{4}$　(2)$\dfrac{\pi}{2}$　(3)$\dfrac{2\pi}{3}$　(4)$\dfrac{7\pi}{6}$　(5)$\dfrac{7\pi}{4}$。

答：(4)

12. $n\in N$，下列無窮級數，哪些爲收斂級數？

(1)$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$

(2)$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots$

(3)$1-2+4-8+\cdots\cdots+(-2)^{n-1}+\cdots\cdots$

(4)$\dfrac{5-4}{5+4}+\dfrac{5^2-4^2}{5^2+4^2}+\dfrac{5^3-4^3}{5^3+4^3}+\cdots\cdots+\dfrac{5^n-4^n}{5^n+4^n}+\cdots\cdots$

(5)$\left(a_1-a_2\right)+\left(a_2-a_3\right)+\left(a_3-a_4\right)+\cdots\cdots+\left(a_n-a_{n+1}\right)+\cdots\cdots$。

答：(2)

13. a、b、c、$k\in R$，$f(x)=ax^2+bx+c$，已知$f'(3)=0$且$f''(x)>0$，

則使$f(k)\geq f(6)$之k的範圍爲下列何者？

(1)k爲任意實數　(2)$k\geq 3$　(3)$k\leq -3$或$k\geq 3$　(4)$k\leq 0$或$k\geq 6$　(5)$-6\leq k\leq 6$。

答：(4)

全神貫注 全力以赴

14. 已知 $f(x)$ 為一實係數多項式：

(1)若 $f''(x)=6x+4$，則 $f(x)$ 是幾次多項式？最高次項的係數為？

(2)承(1)，若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-8}{x-1}=3$，則 $f(x)=$ ？

(3)承(2)，求 $\int_0^1 f(x)\,dx=$ ？

答：(1) $\deg f(x)=3$，領導係數為1　(2) x^3+2x^2-4x+9　(3) $\dfrac{95}{12}$

全神貫注
全力以赴
克斌