

倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

在奪標終點線等你(妳)

第 155~168 題

155. $f(x)$ 為二次實係數多項式：

已知存在唯一的一組實數 α 、 β 、 γ ，使得 $f(4) = \alpha \times f(1) + \beta \times f(2) + \gamma \times f(3)$ ，
則序組 $(\alpha, \beta, \gamma) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1, -3, 3)

156. 已知 $f(x)$ 為五次實係數多項函數且 $f(1+i)=0$ ， $f(0)<0$ ， $f(-1)>0$ ， $f(-2)=0$ ，
則下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(2-2i)=0$ (2) 若 $f(1+\sqrt{2})=0$ ，則 $f(1-\sqrt{2})=0$
(3) $f(x)$ 可被 x^3-2x+4 整除 (4) 方程式 $f(x)=0$ 恰有兩個虛根
(5) 坐標平面上 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸必有三個交點。

答：(3)(4)

157. 滿足對數不等式 $2 < \log_n 2016 < 3$ 的正整數 n 有幾個？

- (1) 45 個 (2) 44 個 (3) 32 個 (4) 23 個 (5) 12 個。

答：(3)

158. 平面上有一個三角形 ABC ，其中 $\overline{AB}=5$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CA}=7$ 。

若 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的外角平分線相交於 D 點，則 D 點到直線 AB 的距離為何？

- (1) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (4) $3\sqrt{6}$ (5) $2\sqrt{6}$ 。

答：(1)

159. 矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 分別將 $A(2,0)$ 、 $B(1,2)$ 、 $C(0,1)$ 三點變換到正方形

$\{(x,y) | 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 內的三點 A' 、 B' 、 C' ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $A'(2a, 2)$ (2) 對於滿足上述條件的 a 與 b 而言，點 (a,b) 所在的區域面積為 $\frac{1}{8}$

$$(3) \overrightarrow{C'B'} = (2a-b, 1) \quad (4) \Delta A'B'C' \text{ 的面積可表為 } \frac{3}{2}(b-a)$$

$$(5) \Delta A'B'C' \text{ 的最大面積為 } \frac{9}{8}。$$

答：(1)(4)(5)

160. 平面上有二直線 $L_1: y=x$, $L_2: y=\sqrt{3}x$, 將點對 L_1 作鏡射的鏡射矩陣設為 M , 將點對 L_2 作鏡射的鏡射矩陣設為 N . 若將點 P_0 對 L_1 作鏡射得到點 Q_0 , 再將點 Q_0 對 L_2 作鏡射得到點 P_1 , 如此稱作一回合, 亦即第 n 回合時要將點 P_{n-1} 對 L_1 先作鏡射得到點 Q_{n-1} , 再將點 Q_{n-1} 對 L_2 作鏡射得到點 P_n (n 為正整數)。

$$(1) \text{ 若 } NM = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \text{ 其中 } 0 < \theta < 2\pi, \text{ 則 } \theta = ?$$

$$(2) \text{ 試以數學歸納法證明 } \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix},$$

其中 n 為正整數。

(3) \therefore 現有二直線外一點 P , 若經過 k 回合後得到的點會和 P 點重合, 則正整數 k 的最小值為何?

答：(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) 略 (3) 12

161. 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內, 函數 $y = \sin x + \cos x$ 的圖形與直線 $y = 1$ 總共有幾個交點?
(1) 2 個 (2) 3 個 (3) 4 個 (4) 5 個 (5) 8 個。

答：(4)

162. 下列哪些選項中的函數圖形經過「平移」後可以和 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 重合?

$$(1) f_1(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \quad (2) f_2(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \cos 2x$$

$$(3) f_3(x) = \frac{12}{13} \sin 2x + \frac{5}{13} \cos 2x \quad (4) f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{1 + \cos 4x} + \sqrt{1 - \cos 4x})$$

$$(5) f_5(x) = \frac{\sec 2x}{1 + \tan^2 2x} + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)。$$

答：(1)(3)

163. 已知兩集合 $A = \left\{ a \mid a = \cos \frac{5m\pi}{12}, m \text{ 為自然數} \right\}$, $B = \left\{ b \mid b = \cos \frac{n\pi}{12}, n \text{ 為自然數} \right\}$:

(1) 試證明兩集合相等, 即 $A = B$ 。

(2) 若集合 $C = \left\{ x \mid x > \frac{1}{2}, x \text{ 為實數} \right\}$, 試求出集合 $A \cap C$ 內的所有元素的值。

答：(1) 見解 (2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$

164. 坐標平面上有二點 $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$ 。請選出正確的選項：

(1) 若矩陣 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ，則 A 點繞原點逆時針旋轉 $\frac{\pi}{3}$ 可得到 B 點

(2) 將 A 點沿著水平方向推移 y 坐標的 2 倍得到 P 點，
再將 P 點沿著鉛直方向推移 x 坐標的 3 倍得到 B 點，

則矩陣 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 必成立

(3) 若 $c+di = 3(\cos\theta + i\sin\theta)(a+bi)$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，
則將 A 點繞原點逆時針旋轉 θ 角，再伸縮 3 倍可得 B 點

(4) 若 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ ，則 $\left| (a+bi) \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right)^3 \left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} \right)^{-2} \right| = 2$

(5) 若 $\left| \frac{c+di}{a+bi} \right| = \sqrt{2}$ ，且 $\frac{c+di}{a+bi}$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{4}$ ，則 $c+d = 2a$ 。

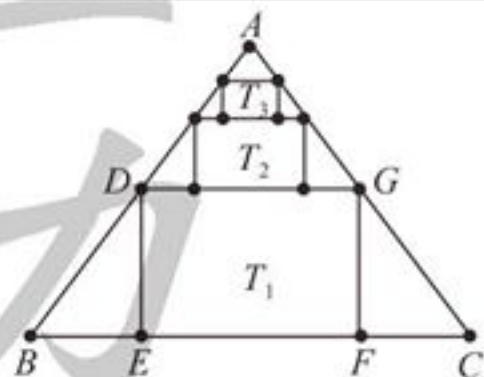
答：(3)(4)(5)

165. 如圖，等腰三角形 ABC 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 12$ 。

矩形 $DEFG$ 的頂點均落在三角形的邊界上，其中 E 、 F 在 \overline{BC} 上。當矩形 $DEFG$ 有最大面積時，將此矩形命名為 T_1 ；再作三角形 ADG 的內接矩形（長邊平行 \overline{BC} ），當此矩形有最大面積時命名為 T_2 ；依此規則不斷的作三角形的內接最大面積矩形，第 n 個矩形命名為 T_n 。

設函數 $f(T_n)$ 為矩形 T_n 的面積。請求出 $\sum_{n=1}^{\infty} f(T_n)$ 的值。

(1) 12 (2) 20 (3) 28 (4) 32 (5) 36。



答：(4)

166. 整係數多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 $a \geq b > 0$ ，若 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^3 + 1} = -1$ ，

則 $a+b+c$ 可能是下列哪些選項？

(1) 5 (2) 7 (3) 9 (4) 11 (5) 13。

答：(1)(3)(5)

167. 已知 Γ_1 與 $\Gamma_2: y = x^2 - 1$ 兩圖形關於點 $(1, 1)$ 對稱，試回答下列問題：

(1) 試求 Γ_1 的方程式。

(2) 試求兩圖形 Γ_1 與 Γ_2 所圍成的封閉區域之面積。

答：(1) $\Gamma_1: y = -x^2 + 4x - 1$ (2) $\frac{8}{3}$

168. 已知函數 $f(x) = \int_{-3}^x (t^2 - t - 2) dt$ ，其中 $-3 \leq x \leq 3$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(0) = -12$ (2) 函數 $f(x)$ 在區間 $(-1, 2)$ 為遞增函數
(3) $y = f(x)$ 的圖形在區間 $(-3, -1)$ 為凹口向下 (4) 函數 $f(x)$ 在 $x = 3$ 處有相對極大值
(5) 函數 $f(x)$ 的大值為 6。

答：(3)(4)

全神貫注 全力以赴

克斌