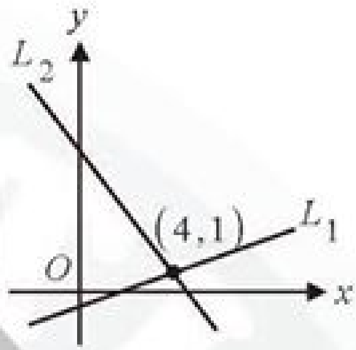
倒數 14 天
衝刺 200 題

俞克斌老師

在奪標終點線等你(妳)

第 169~182 題

169. 如右圖，兩直線方程式
分別為$L_1: y=m_1x+b_1$，$L_2: y=m_2x+b_2$，
且兩直線交於$(4,1)$，
則下列敘述哪些正確？



(1) $m_1+m_2>0$
(2) $5m_1+b_1>1$
(3) $5m_2+b_2>1$
(4) 設k為常數，則直線$(2+k)x+(1-4k)y=9$可與L_1，L_2圍成一個三角形
(5) 若L_1，L_2的交角記為θ，則$\sin\theta=\dfrac{\left|(1,m_1)\cdot(1,m_2)\right|}{\sqrt{1+m_1^{\,2}}\times\sqrt{1+m_2^{\,2}}}$

答：(2)

170. 一位數學老師製作出「向量拼圖」來幫助學生理解向量，已知每個「向量拼圖」中，僅能相加，無法相減，而且可以數種同時相加，目前有以下4塊「向量拼圖」（其中A、B為直角坐標；C、D為極坐標表示法），分別為：$A(-4,3)$；$B(3,5)$；$C[x,\pi]$，$3\le x\le 5$（可伸縮，例如$x=4$表長度為4，與x正向夾π弧度的向量）；$D\left[3,\dfrac{\pi}{12}\right]$，下列哪些選項中的向量，可以透過已有的向量拼圖拼出來？

(1)$(-4,8)$ (2)$\left(-4+\dfrac{3\sqrt{3}}{2},4.5\right)$ (3)$(-7,-2)$ (4)$(-1+3\cos15°,5+3\sin15°)$ (5)$(-5,7)$。

答：(1)(4)

171. 空間中已有三點$A(0,0,0)$、$B(3,1,-2)$、$C(-1,3,2)$，大威想加入第四點D，使得四面體$ABCD$的體積等於2。經由下列思考步驟，確定點D所在：
(1) 先求ΔABC的面積，其值為多少？

(2) 符合要求加入第四點 D 的話，則 D 點到平面 ABC 的距離應為多少？
(3) 大威發現這樣的 D 不只一點，若所有滿足條件的 D 點恆在兩平行平面上，請寫出這兩個平面的方程式。

答：(1) $3\sqrt{5}$　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　(3) $4x-2y+5z=\pm 6$

172. 已知空間中四點 $O(0,0,0)$、$A(x,y,z)$、$B(2,-4,4)$、$C(4,1,-1)$，且 $x^2+y^2+z^2=2$，請選出正確的選項：
(1)三角形 OBC 的面積為 $9\sqrt{2}$　(2) $\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right|$ 的最大值為 6
(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB}\right)$　(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\right)$
(5)三階行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的最大值為 36。

答：(1)(2)(4)(5)

173. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ 為一個旋轉矩陣，$B=\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{bmatrix}$ 為一個鏡射矩陣，則下列哪些選項是正確的？
(1) $AB=BA$　(2) $(AB)^{105}=(BA)^{105}$　(3) $(AB)^{2016}=(BA)^{2016}$
(4) $(ABA)^{10}=AB^{10}A$　(5) $(BAB)^{10}=BA^{10}B$。

答：(3)(5)

174. 二階方陣 $A_1=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{4} & \dfrac{-\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{-1}{4} \end{bmatrix}$，現在以 A_2 表示 2 個 A_1 連乘，A_3 表示 3 個 A_1 連乘，……，A_n 表示 n 個 A_1 連乘的結果，其中 n 為自然數。令 $A_n=\begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix}$，例如：
$a_2=\dfrac{-1}{8}$，$b_2=\dfrac{-\sqrt{3}}{8}$，則下列敘述哪些正確？
(1) A_1 的乘法反方陣 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{4} & \dfrac{-1}{4} \end{bmatrix}$
(2) $A_3=\dfrac{1}{64}I_2$，其中 I_2 為二階單位方陣
(3) a_n 不等於零，對所有自然數 n 皆成立

(4) 當n趨近於無窮大，數列d_1、d_2、d_3、....趨近零
(5) 存在某個自然數n，使得$4a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$不為零

答：(3)(4)

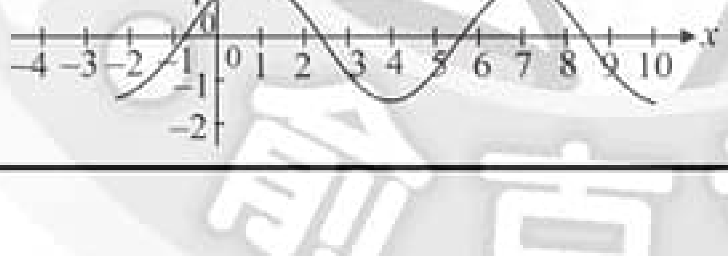
175. 設S是二階矩陣，若點$A(1,1)$、$B(-1,3)$與$C(s,t)$經矩陣S的變換後的對應點分別為$A'(3,3)$、$B'(-7,1)$與$C'(s',t')$：
(1)求二階矩陣S。
(2)求二階矩陣S的反矩陣S^{-1}。
(3)若三角形ABC為正三角形，求三角形$A'B'C'$的面積。
(4)設直線L：$y=kx$經過矩陣S變換後的圖形仍是同一條直線L，求k之值。

答：(1) $S=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (2) $S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ (3) $12\sqrt{3}$ (4) 1或2

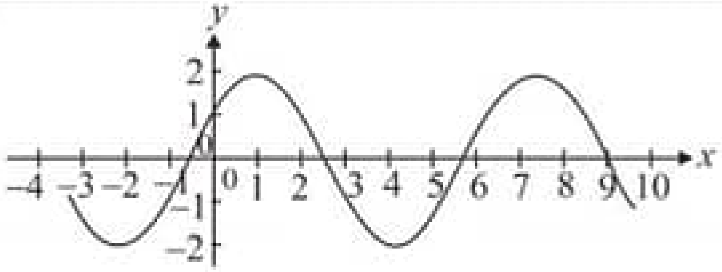
176. 寡慷慨遊戲公司推出一款新遊戲，遊戲規則如下：
①參與者先於銀行存入P元
②參與者指定每次下注的金額為前一天遊戲結束，結算後帳戶餘額的r倍（$0<r<1$），且一經指定，不可再變更。
③每天由公正第三人不做假先生丟擲一公正硬幣。若出現正面，則寡慷慨公司需在參與者的銀行帳戶存入下注金額的2倍獎金；若出現反面，則由銀行帳戶中扣除下注金額。例如，某人帳戶餘額為100元，指定每次下注金額為前一日結算後的10%，今天下注金額即為$100\times10\%=10$元。若出現正面，則結算後有$100+2\times10=120$元；出現反面，則結算後金額為$100-10=90$元。

今有想要發加入此遊戲，於銀行存入2^{20}元，並約定每天下注金額為前一天結束時的$\frac{1}{2}$倍，且只玩10天。
(1)若10天中恰出現2次正面，則結束時想要發可拿回多少錢？
(2)$P(N)$表示10次中出現N次正面的機率，則$P(N\ge8)=$？
(3)隨機變數X表示此遊戲結束，結算後的帳戶餘額。若隨機變數X的期望值$E(X)=a^n$，其中a、n均為正整數，且$1\le a\le9$，求數對$(a,n)=$？

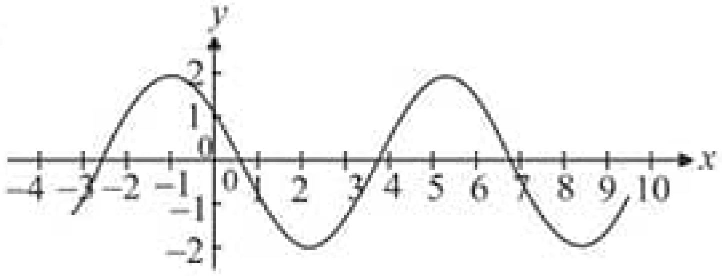
答：(1)16384 (2)$\frac{7}{128}$

177. 函數$y=\cos(-x)+\sqrt{3}\sin(-x)$的函數圖形為下列哪一個選項？
(1)


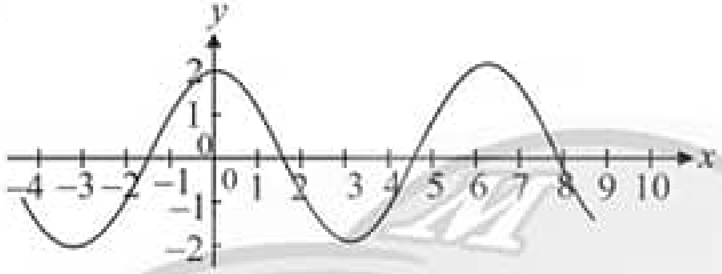
(2)



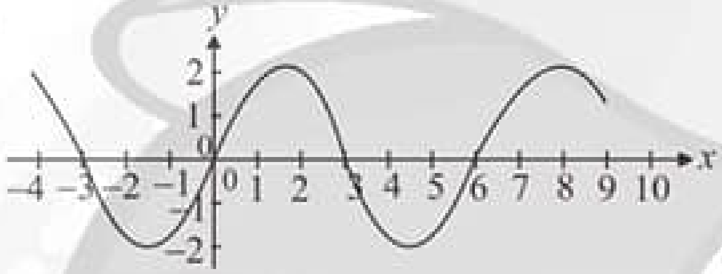
(3)



(4)



(5)



。

答：(3)

178. 設x為實數，若三個週期函數$f_1(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$、$f_2(x)=\cos x+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$、$f_3(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+2(\sin x)(\cos x)-\sqrt{3}\cos^2 x$的週期及振幅分別為$T_1$、$T_2$、$T_3$及$A_1$、$A_2$、$A_3$，請選出正確的選項：

(1)$T_1=T_2=2\pi$　(2)$T_3=\frac{\pi}{2}$　(3)$A_1=A_3=2A_2$

(4)$y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$的函數圖形有相同的最高點

(5)$y=f_1(x)$、$y=f_3(x)$的函數圖形有相同的最低點。

答：(1)(3)(4)

179. 設直線L：$y=a$，$f(x)=\cos(x-\phi)$，$g(x)=\sin x$，其中$0<a\le 1$，$0<\phi<\frac{\pi}{2}$，考慮$x>0$時，直線L與$f(x)$交點的x坐標由小到大分別為α_1、α_2、……、α_n、……，直線L與$g(x)$交點的x坐標由小到大分別為β_1、β_2、……、β_n、……，下列敘述中請選出正確的選項：

(1)函數$h_1(x)=f(x)+g(x)$的週期為2π

(2)考慮$0\le x\le 2\pi$，L與$f(x)$的交點個數與L與$g(x)$的交點個數相同

(3)若$\cos\phi \le a$，則α_1、α_2、……、β_1、β_2、……中，最小的為β_1

(4)若$\cos\phi \le a$，考慮$0 \le x \le 2016\pi$，則α_1、α_2、……、α_n、β_1、β_2、……、β_n中，最大的為β_n

(5)若$a=1$，則對任何$n \in N$，皆有$\beta_n - \alpha_n = \dfrac{\pi}{2} - \phi$。

答：(1)(2)(4)(5)

180. 在複數平面上，設方程式$z^4 = 8+8\sqrt{3}i$的四個根依主幅角大小從小到大分別為z_1、z_2、z_3、z_4，方程式$z^4 = -16$的四個根依主幅角大小從小到大分別為ω_1、ω_2、ω_3、ω_4：

(1)求z_1、z_2、z_3、z_4之值。（以極式表示）

(2)若複數z_1、ω_1、z_2、ω_2、z_3、ω_3、z_4、ω_4在複數平面上對應的點依序可以連成一個八邊形，求此八邊形的面積。

(3)計算$|z_1-\omega_1| \times |z_1-\omega_2| \times |z_1-\omega_3| \times |z_1-\omega_4|$之值。

答：(2) $4+4\sqrt{3}$　(3) $16\sqrt{3}$

181. 數列〈a_n〉為公比$=-0.9$，首項未知的無窮等比數列，下列敘述請選出正確的選項：

(1)設$b_n = \log a_n$，則b_n為等差數列　(2)若$c_n = 2^{a_n}$，則$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$

(3)若$a_4 = 729$，則$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < -500$

(4)若$a_1 = 10$，並設坐標平面上點$p_k = (k, a_k)$，則$\overline{p_k p_{k+1}}$的長度亦為等比遞減

(5)若$a_1 = 10$，並設坐標平面上點$p_k = (k, a_k)$，則$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\overline{p_k p_{k+1}}\right)^2 < 150$。

答：(2)(3)

182. 設二次函數$f(x) = x^2 + ax + 3$，且函數$f(x)$在區間$[0,1]$為嚴格遞增函數。設R為函數$y=f(x)$的圖形與直線$x=0$、$x=1$及x軸所圍成的區域，今欲求區域R的面積，而將區間$[0,1]$作n等分，得到區域R面積的上和$U_n = \dfrac{26n^2+9n+1}{6n^2}$，下和$L_n = \dfrac{bn^2-9n+1}{6n^2}$，且區域$R$的面積為$c$，則$a+b+c$之值為________。（化成最簡分數）

答：$a+b+c = \dfrac{97}{3}$