大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試數學乙試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 矩陣$\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}^5$與下列哪一個矩陣相等？

(1)$\begin{bmatrix}-1 & 0\\-5 & -1\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}1 & 0\\-5 & 1\end{bmatrix}$ (3)$\begin{bmatrix}-1 & 5\\0 & -1\end{bmatrix}$ (4)$\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix}$ (5)$\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & -1\end{bmatrix}$。

【109 數乙】

答：(5)

解：$\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}^5=(-I+B)^5$，$B=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}^5=C_0^5(-I)^5+C_1^5(-I)^4B=-I+5B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\5 & -1\end{bmatrix}$

2. 某畢業班由8位同學負責畢旅規劃，分成A、B、C三組，且三組分別由3人、3人、2人組成。8位同學每人都會被分配到其中一組，且甲、乙兩位同學一定要在同一組。這8位同學總共有幾種分組方式？

(1)140種 (2)150種 (3)160種 (4)170種 (5)180種。

【109 數乙】

答：(1)

解：$\left.\begin{array}{l}\text{甲乙在}A\text{組 }C_1^6C_3^5C_2^2=60\\ \text{甲乙在}B\text{組 }C_3^6C_1^3C_2^2=60\\ \text{甲乙在}C\text{組 }C_3^6C_3^3=20\end{array}\right\}$合計140種

3. 為了瞭解IQ和腦容量是否有關，一項小型研究利用核磁共振測量了5個人的腦容量（以10,000像素為單位），連同他們的IQ列表如下：

腦容量(X)	90	95	91	88	106
IQ(Y)	90	100	112	80	103

已知上表中的X之平均值為$\mu_X=94$，Y之平均值為$\mu_Y=97$，腦容量(X)與IQ(Y)的相關係數為$r_{X,Y}$。根據上述表格，試判斷$r_{X,Y}$的值最可能是下列哪一個選項？

(1)$r_{X,Y}\le -1$ (2)$-1<r_{X,Y}<-0.5$ (3)$r_{X,Y}=0$ (4)$0<r_{X,Y}<0.5$ (5)$r_{X,Y}\ge 1$。

【109 數乙】

答：(4)

解：

x_i	y_i	$x_i-\mu_A$	$y_i-\mu_B$	$(x_i-\mu_A)^2$	$(y_i-\mu_B)^2$	$(x_i-\mu_A)(y_i-\mu_B)$
90	90	-4	-7	16	49	28
95	100	1	3	1	9	3
91	112	-3	15	9	225	-45
88	80	-6	-17	36	289	102
106	103	12	6	144	36	72
$\mu_x=94$ $\mu_y=97$				$\Sigma=206$	$\Sigma=608$	$\Sigma=160$

$$r_{X,Y}=\frac{160}{\sqrt{206}\sqrt{608}}\fallingdotseq 0.45\cdots\cdots$$

二、多選題（佔 24 分）

4. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式函數且 $f(x)=0$ 沒有實根。試選出正確的選項。
(1) $f(0)>0$　(2) $f(1)f(2)>0$
(3)若 $f(x)-1=0$ 有實根，則 $f(x)-2=0$ 有實根
(4)若 $f(x)-1=0$ 有重根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根
(5)若 $f(x)-1=0$ 有兩相異實根，則 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 有實根。【109 數乙】

答：(2)(3)(4)

解：(1)不一定
(2) $f(t),f(s)>0$
(3) $f(x)-1=0$ 有實根，表 $y=f(x)$ 開口向上
$\Rightarrow f(x)-2=0$ 必有實根
(4) $f(x)-1=0$ 有重根，表 $y=f(x)$ 開口向上，頂點 $(x,1)$
$\Rightarrow f(x)-\frac{1}{2}=0$ 沒有實根
(5)不一定，可能頂點 (x,y)，$\frac{1}{2}<y<1$

5. 數列 $a_1,a_2,\cdots\cdots$ 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1=3$，$a_2=2$。試選出正確的選項。
(1) $a_4>a_5>a_6>a_7$　(2) $\frac{a_{10}}{a_{11}}>10$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$
(5) $\sum\limits_{n=1}^{100}a_n>9$。【109 數乙】

答：(2)(3)

解：$a_1=3$，$a_3=1$，$a_5=\frac{1}{3}$，$a_7=\frac{1}{9}$，$a_9=\frac{1}{27}$，$a_{11}=\frac{1}{81}$
$a_2=2$，$a_4=1$，$a_6=\frac{1}{2}$，$a_8=\frac{1}{4}$，$a_{10}=\frac{1}{8}$，$a_{12}=\frac{1}{16}$

$$\frac{a_{10}}{a_{11}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{81}}=\frac{81}{8}>10，\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

$$\lim_{2k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\lim_{2k\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}=\lim_{2k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=0$$

$$\lim_{2k+1\to\infty}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}=\lim_{2k+1\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{3\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}=\lim_{2k+1\to\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}\text{ 發散}$$

$$\sum_{n=1}^{100}a_n=\frac{3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}\right]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{17}{2}-3\left(\frac{1}{3}\right)^{50}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{50}<9$$

6. 有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

（一）當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。
（二）當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。
（三）當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試選出正確的選項。

(1)投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2 的機率為 $\frac{1}{2}$
(2)投擲骰子一次，棋子的坐標之期望值為 0
(3)投擲骰子二次，棋子的坐標有可能為 -5
(4)投擲骰子二次，在所擲兩次之點數和為奇數的情形下，棋子的坐標為正的機率為 $\frac{4}{9}$
(5)投擲骰子三次，棋子在原點的機率為 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$。【109 數乙】

答：(2)(4)

解：(1) $\underbrace{P(4\text{點})}_{\text{位於}+2}+\underbrace{P(3\text{點})}_{\text{位於}-2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $E(X)=\frac{1}{6}\left[\underbrace{1}_{2\text{點}}+\underbrace{2}_{4\text{點}}+\underbrace{3}_{6\text{點}}-\underbrace{0}_{1\text{點}}-\underbrace{2}_{3\text{點}}-\underbrace{4}_{5\text{點}}\right]=0$

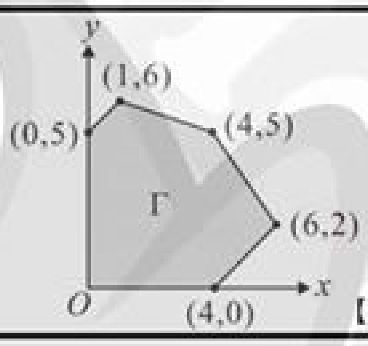
(3)因為 -5 為奇數，故不可能

$$(4)\frac{\underbrace{4}_{\substack{1-0,\\2-0,\\3-0,3-2}}\times 2!}{\underbrace{9}_{\substack{1-0,1-2,1-4,\\2-0,2-2,2-4,\\3-0,3-2,3-4}}\times 2!}=\frac{4}{9}$$

$$(5)\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left[\underbrace{\frac{3!}{3!}}_{-0-0-0}+\underbrace{\frac{3!}{2!}\times 2}_{2-2-0,+1+1-2}+\underbrace{3!\times 2}_{2-2-0,1+3-4}\right]=\frac{19}{216}$$

三、選填題（佔 32 分）

A. 坐標平面上有一個多邊形區域Γ(含邊界)，如圖所示。若$k>0$，直線$7x+2y=k$與兩坐標軸圍成一個三角形區域，使得多邊形區域Γ落在此三角形區域(含邊界)內，則最小正實數$k=$________。



【109 數乙】

答： 46

解：

(x,y)	$(0,5)$	$(1,6)$	$(4,5)$	$(6,2)$	$(4,0)$
$7x+2y=k$	10	19	38	46	28

B. 若隨機變數X的可能值為1、2、3、4，其出現的機率$P(X=k)$與$\dfrac{1}{k}$成正比，則機率$P(X=3)$為________。(化為最簡分數) 【109 數乙】

答： $\dfrac{4}{25}$

解： $P(X=1,2,3,4)=\dfrac{t}{1}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{t}{3}+\dfrac{t}{4}=1 \Rightarrow t=\dfrac{12}{25}$

$P(X=3)=\dfrac{t}{3}=\dfrac{4}{25}$

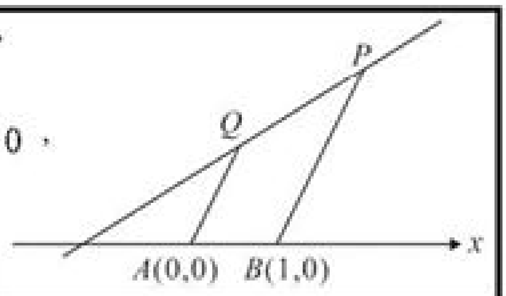
C. 一家公司僅有經理、秘書、業務三位成員，若只有秘書加薪10%，則全公司薪資總支出增加3%；若只有業務加薪20%，則全公司薪資總支出增加4%；如果只有經理減薪15%，那麼全公司薪資總支出將減少________%。 【109 數乙】

答： 7.5

解： $\begin{cases}A+1.1B+C=1.03(A+B+C)\\A+B+1.2C=1.04(A+B+C)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7B=3A+3C\\4C=A+B\end{cases}\Rightarrow A:B:C=5:3:2$

$0.85A+B+C=(1-k)(A+B+C)\Rightarrow k=0.75$

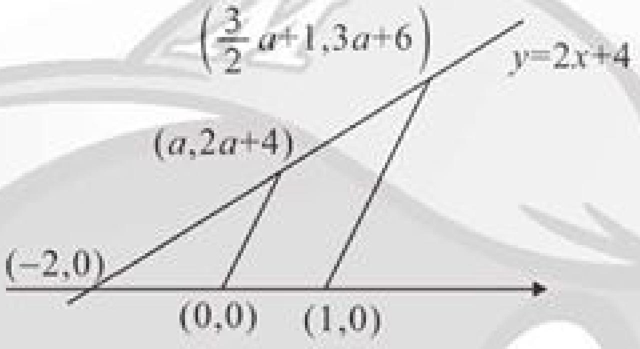
D. 坐標平面上有一梯形，四個頂點分別為 $A(0,0)$，$B(1,0)$，P，Q，其中過 P，Q 兩點的直線方程式為 $y=2x+4$，如圖為示意圖。若 Q 點的坐標為 $(a,2a+4)$，其中實數 $a\ge 0$，則梯形 $ABPQ$ 的面積為________。(化為最簡分數)



【109 數乙】

答：$\frac{5}{2}a+5$

解：



第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

一. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下，n 天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為 $P_n=P_0(1+r)^n$，其中 $P_0\ge 1$ 且 $r>0$。試回答下列問題：

(1) 已知 $A=\dfrac{\log P_5-\log P_2}{3}$，$B=\dfrac{\log P_8-\log P_6}{2}$，試說明 $A=B$。(4 分)

(2) 已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，試求 $\dfrac{P_{20}}{P_{17}}\times\dfrac{P_8}{P_6}\times\dfrac{P_5}{P_2}$ 的值。(5 分)

(3) 承(2)，試求 $\dfrac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}$ 的值。(4 分)

【109 數乙】

答：(2) $\sqrt{10}$　(3) $\frac{1}{16}$

解：(1) $A-B=\dfrac{2\log P_5-2\log 2-3\log P_8+3\log P_6}{6}$

$$=\frac{1}{6}\log\left(\frac{{P_5}^2\times{P_6}^3}{{P_2}^2{P_8}^3}\right)=\frac{1}{6}\log\left(\frac{{P_0}^2(1+r)^{10}{P_0}^3(1+r)^{18}}{{P_0}^2(1+r)^4{P_0}^3(1+r)^{24}}\right)=\frac{1}{6}\log 1=0$$

(2) $P_{16}=P_0(1+r)^{16}=1090\ \Rightarrow (1+r)^{16}=10$

$$\text{所求}=\frac{P_0(1+r)^{20}\times P_0(1+r)^8\times P_0(1+r)^5}{P_0(1+r)^{17}\times P_0(1+r)^6\times P_0(1+r)^2}=(1+r)^8=\sqrt{10}$$

(3) $$\text{所求}=\frac{1}{3}\log\left(\frac{P_{20}}{P_{17}}\right)=\frac{1}{3}\log\left(\frac{P_0(1+r)^{20}}{P_0(1+r)^{17}}\right)=\log\left[(1+r)^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$=\log(1+r)=\log 10^{\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}$

二. 在坐標平面上，兩平行直線 L_1、L_2 的斜率都是 2 且距離為 5，又點 $A(2,-1)$ 是 L_1 在第四象限的一點，點 B 是 L_2 在第二象限的一點且 $\overline{AB}=5$。已知直線 L_3 的斜率為 3，通過點 A 且交 L_2 於點 C，試回答下列問題：

(1)試求直線 AB 的斜率。(2 分)

(2)試求向量 $\overrightarrow{AB}$。(4 分)

(3)試求內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值。(3 分)

(4)試求向量 $\overrightarrow{AC}$。(4 分)【109 數乙】

答：斜率 $AB=-\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25$，$\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$

解：L_1：$(y+1)=2(x-2)\Rightarrow y=2x-5$。故 L_2：$y=2x+k$，過第二象限，故 $k>0$

$d(L_1,L_2)=\frac{|k+5|}{\sqrt{5}}=5\Rightarrow k=5\sqrt{5}-5$。故 L_2：$y=2x+5\sqrt{5}-5$

$B\left(t,2t+5\sqrt{5}-5\right)\in$ 第二象限，$\overline{AB}=\sqrt{(t-2)^2+\left(2t+5\sqrt{5}-4\right)^2}=5\Rightarrow t=2-2\sqrt{5}$

故 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，斜率 $AB=-\frac{1}{2}$

L_3：$(y+1)=3(x-2)\Rightarrow y=3x-7$，與 L_2 交於 $C\left(5\sqrt{5}+2,15\sqrt{5}-1\right)$

故 $\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-50+75=25$