倒數 30 天
衝刺 300 題
六冊五輪總複習

俞克斌 杯杯 在奪標終點線等你(妳)

第四冊第三輪（每日 10 題 時間 50 分鐘）

基本必考題

1. 四面體$O-ABC$中，$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$兩兩互相垂直，且$\overline{OA}=1$、$\overline{OB}=1$、$\overline{OC}=2$。已知該四面體內有一點P到四個面的距離均為r，則$r=$________。(化為最簡分數)

答：$\frac{1}{4}$

2. 已知$P(3,2,4)$為空間座標中一點。下列選項中哪一個的值最小？
(1) P點到$Q(5,4,1)$的距離
(2) P點到xy平面的距離
(3) P點到z軸的距離
(4) P點到平面$E:6x-2y+3z=-3$的距離
(5) P點到直線$L:\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{1}$的距離

答：(5)

3. 江小蕙使用增廣矩陣列運算解一個三元一次聯立方程式，
其中文字p、q、r的位置表示被滴到黑色墨水的數字，
其解題流程為$\cdots\rightarrow\begin{bmatrix} p & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & q & 1 \\ 1 & 3 & -3 & r \end{bmatrix}\cdots\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\rightarrow\cdots$；
試求：$p+q+r$之值=________。

答：19

4. 設兩數列$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$滿足$a_n=5a_{n-1}-2b_{n-1}$，$b_n=7a_{n-1}-3b_{n-1}$
且二階方陣$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix} a_{105} \\ b_{105} \end{bmatrix}=P\cdot\begin{bmatrix} a_{103} \\ b_{103} \end{bmatrix}$，則$P$的反矩陣$P^{-1}=$________。

答：$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -14 & 11 \end{bmatrix}$

5. 兩個二階方陣 $A=\begin{bmatrix}-x & 3\\ 2 & 7+x\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 7+x\\ 2-x & 6\end{bmatrix}$，若 A^{-1} 存在，但 B^{-1} 不存在，則 $x=$ ________。

答：-4

6. 已知 O 為坐標原點，
將點 $P(2,-4)$ 對直線 L_1：$x-\sqrt{3}y=0$ 做鏡射得 Q 點，
再將 Q 點對直線 L_2：$x-y=0$ 做鏡射得 R 點，
最後將 R 點以 O 點為中心逆時針旋轉 20 度。
上述的動作可視為：以 O 點為旋轉中心，將 P 點逆時針旋轉 ______ 度得到 R 點。

答：50

進階必勝題

1. 空間中，已知直線 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-5}=z+2$ 與平面 $E:x-2y-z=15$ 交於一點，
若直線 L 在平面 E 上的投影為直線 L'，則下列哪些點在直線 L' 上？
(1) $(1,0,-2)$　(2) $(0,-1,-13)$　(3) $(2,-4,-5)$
(4) $(3,-4,-4)$　(5) $(4,-5,-1)$

答：(2)(4)(5)

2. 已知 $\begin{cases}x=\alpha+2\beta\\ y=3\alpha+4\beta\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\alpha=u+v\\ \beta=u-v\end{cases}$，
利用矩陣的乘法可得：$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，其中 A 是一個二階方陣，$A=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，
則 $a_{11}=$ ________、$a_{12}=$ ________、$a_{21}=$ ________、$a_{22}=$ ________。

答：$a_{11}=-1$；$a_{12}=1$；$a_{21}=-7$；$a_{22}=3$

3. 矩陣在每個不為 0 的列中，
第一個不為 0 的元所屬的行中，只有這個元不為 0，我們就稱它為簡化矩陣。
今將一矩陣 $\begin{bmatrix}a & -5 & 1 & 0\\ -1 & b & 0 & 1\end{bmatrix}$ 作矩陣的列運算，得一簡化矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，
則方程組 $\begin{cases}ax-5y=2\\ -x+by=-1\end{cases}$ 的解 (x,y) 為 ________。

答：$(x,y)=(-1,-1)$

4. (1) 若複數平面上，$A(x,y)$所對應的複數為$z=x+yi$，對於正整數m，

若$(x+yi)\left(1+\sqrt{3}i\right)^{m}=r(x+yi)$，其中$r$為正實數，求正整數$m$的最小值。

(2) 對於正整數n，設$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{n}=a_n+ib_n$，其中$i=\sqrt{-1}$且$a_n$、$b_n$為實數，

恆等式$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{n+1}=\left(1+\sqrt{3}i\right)^{n}\times\left(1+\sqrt{3}i\right)$可推得$a_n$、$b_n$會滿足

乘法矩陣$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣$T$。

(3) 承題(2)，若矩陣T在平面上定義成線性變換，將矩陣T寫成以下兩個矩陣相乘：

$T=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，其$k$為正實數，$0°\le\theta<360°$，求$k$和$\theta$。

答：(1)6　(2)$T=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$　(3)$k=2$，$\theta=60°$