

倒數 30 天

衝刺 300 題

六冊五輪總複習

俞克斌 杯杯 在奪標終點線等你(妳)

第六冊第三輪 (每日 10 題 時間 50 分鐘)

基本必考題

1. 已知數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 為公差不為 0 的等差數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$ ，求：

(1) 數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 的公差比值。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a_{2n-1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$?

答：(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$

2. 設多項式函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = 2$ ， $f(1) = 0$ ， $f''(x) = 4$ ，

請選出正確選項：

(1) $f(-1) = 0$ (2) $f(0) = 5$ (3) $f'(1) = 1$ (4) $f'(2) = 2$ (5) $f'(3) = 5$ 。

答：(2)(5)

3. 設曲線 Γ 的方程式為 $y = x^3 + x^2 - 1$

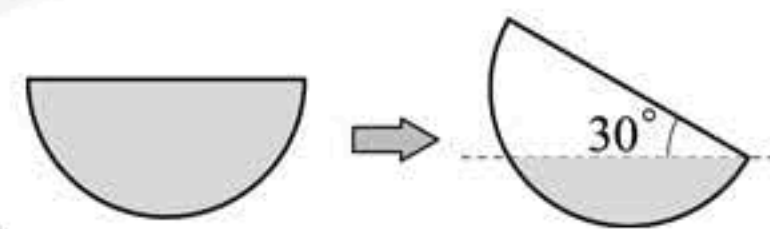
(1) 求過點 $P\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ 且與曲線 Γ 相切的直線方程式。

(2) 設點 $Q(k, -1)$ ， $k \in \mathbb{R}$ ，若過 Q 點且與曲線 Γ 相切的直線恰有一條，求 k 的範圍。

答：(1) $y + 1 = 0$ (2) $-1 < k < -\frac{1}{9}$

4. 右圖是一半球形容器，直徑是 12 公分，現在裝滿水之後再將其傾斜 30° ，若倒出的水體積是 $a \cdot \pi$ 立方公分，

則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(球體體積：半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$)



答：99

5. 設 $f(x)$ 是一實係數三次多項式。

(1) 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 處有極值，且 $y=f(x)$ 的圖形在反曲點的切線斜率為 -3 ，試求 $f'(x)$ 。

(2) 若 $f(x)$ 又滿足 $\int_1^3 f(x) dx = 0$ ，試求 $f(x)$ 。

答：(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ (2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

6. 設三次函數 $f(x) = x^3 - (2a+1)x^2 + bx - c$ ，且 a, b, c 均為整數，

若 $f(x) = 0$ 有虛根，且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}$ ，則下列敘述何者正確？

(1) $2a - b + c = 0$ (2) $4a - b = 0$ (3) $a = 1$ (4) $b + c = 6$

答：(1)(2)(3)(4)

進階必勝題

1. 已知 x 的範圍和右式相符 $\frac{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x - 4)^2(x - 3)}{(x + 2)^2(x - 2)} \leq 0$

若在此範圍中 $f(x) = x^3 - 3x$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ _____。

答：50

2. 設多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(2) = f''(-2) = 0$ 、 $f(0) = f'(0) = 0$ ：

(1) 試求 $f'(x) = 0$ 的所有解。

(2) 試求 $f(x) = 0$ 的所有解。

(3) 若 $\int_{-2}^2 f''(x) dx > 0$ ，試證 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 。

答：(1) $0, \pm 2\sqrt{3}$ (2) $0, \pm 2\sqrt{6}$ (3) 略

3. 已知 $0 \leq k \leq 1$ ，欲使 $\int_0^1 |x^3 - kx^2| dx$ 有最小值，下列何者正確？

(1) $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (4) $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (5) $k = \frac{1}{2}$

答：(4)

4. 已知 $f(x)$ 為四次實係數多項式，且 $y=f(x)$ 的圖形與其通過的五點如右圖所示，請問下列敘述何者正確？

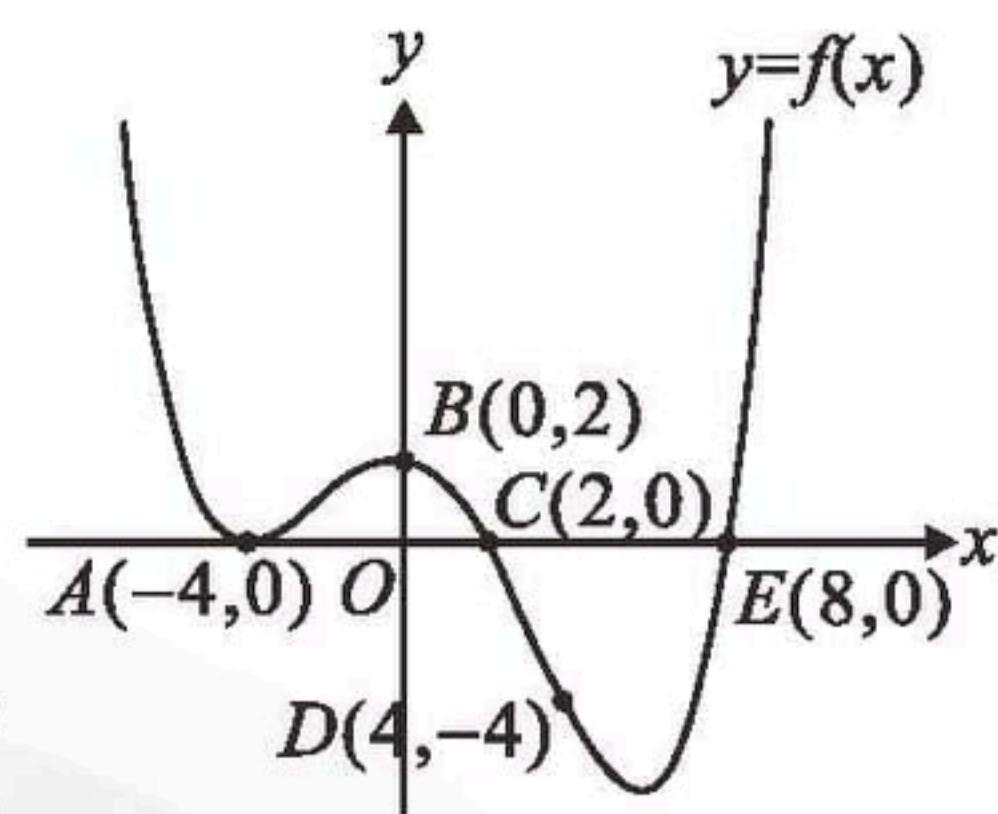
(1) 方程式 $f(x)=x$ 有四個相異實根

(2) 方程式 $f(x)=1$ 的四根乘積大於 0

(3) 不等式 $f(x-1)<0$ 的解為 $1<x<7$

(4) 不等式 $f(2x)\geq 0$ 的解為 $x\leq 1$ 或 $x\geq 4$

(5) 設 $y=f(x)$ 在 $x=\alpha$ 時有相對極大值，則 $\lim_{n\rightarrow\infty} \alpha^n = 0$ 。



答：(2)(4)(5)