台中一中 107 年(106 學年度)
高一上期末考數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 若 A、B、C、D、E、F 爲 $f(x)=1+3^x$ 的圖形上六個點，且此六點的 x 坐標依序爲 0.4、0.8、1.2、1.6、2、2.4，請問下列哪個線段最長？
(1) $\overline{AB}$　(2) $\overline{BC}$　(3) $\overline{CD}$　(4) $\overline{DE}$　(5) $\overline{EF}$。【107 中一中】

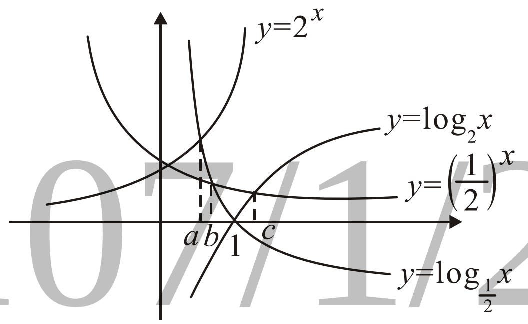
答：(5)

解：切線斜率遞增，故(1)<(2)<(3)<(4)<(5)

2. 方程式 $2^x=\log_{\frac{1}{2}}x$、$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_{\frac{1}{2}}x$、$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$ 的解依次爲 $x=a$、$x=b$、$x=c$，請問 a、b、c 的大小順序爲何？
(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$。【107 中一中】

答：(5)

解：如右圖



3. 請問方程式 $9^{\log_3 x}=2^{-|x|}$ 有多少個相異實根？
(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 3 個　(5) 至少 4 個。【107 中一中】

答：(2)

解：$y=9^{\log_3 x}=9^{\log_9 x^2}=x^2$，但 $x>0$　與 $y=2^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 交於1點

4. 設 $a=\log_3 5$，$b=\log_5 14$，$c=\log_9 21$，請選出正確的大小關係：
(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$。【107 中一中】

答：(3)

解：$a=\dfrac{\log 5}{\log 3}\fallingdotseq\dfrac{0.6990}{0.4771}\fallingdotseq 1.465\cdots$

$$b=\frac{\log 14}{\log 5}\fallingdotseq\frac{0.3010+0.8451}{0.6990}\fallingdotseq 1.639\cdots$$

$$c=\frac{\log 15}{\log 9}\fallingdotseq\frac{0.4771+0.6990}{0.9542}\fallingdotseq 1.232\cdots$$

俞同學寫的作業 107/1/27

二、多選題

5. 請選出正確的選項：

(1)存在正實數a，使得$2^{a}=\sqrt{5}$　(2)存在負實數b，使得$3^{b}=0.5$

(3)存在有理數c，使得$5^{c}=7$　(4)存在正有理數d，使得$\log_{2}d=\dfrac{7}{3}$

(5)存在正實數e，使得$\log_{5}e=-\sqrt{3}$。　【107 中一中】

答：(1)(2)(5)

解：(1)$2^{a}\geq 2^{0}=1$　(2)$3^{b}\leq 3^{0}=1$　(3)$c=\log_{5}7\notin Q$

(4)$d=2^{\frac{7}{3}}\notin Q$　(5)$e=5^{-\sqrt{3}}\in R$

6. 設點$A(a,b)$爲函數$y=2^{x}$圖形上的一點，請選出正確的選項：

(1)點$(1,0)$落在函數$y=2^{x}$的圖形上

(2)點$(a+1,2b)$落在函數$y=2^{x}$的圖形上

(3)點(b,a)落在函數$y=\log_{2}x$的圖形上

(4)點$\left(\dfrac{1}{b},1-a\right)$落在函數$y=\log_{2}x$的圖形上

(5)點$\left(b^{2},2a\right)$落在函數$y=\log_{2}x$的圖形上。　【107 中一中】

答：(2)(3)(5)

解：(1)$0\neq 2^{1}$　(2)$b=2^{a}\Rightarrow 2b=2^{a+1}$　(3)$b=2^{a}>0\Rightarrow a=\log_{2}b$

(4)$1-a\neq -a=\log_{2}\dfrac{1}{b}$　(5)$2a=2\log_{2}b=\log_{2}b^{2}$

7. 下列各數中，請選出滿足不等式$\log_{2}(2x-3)\leq 3+\log_{\frac{1}{2}}(x+6)$的選項：

(1)-5.1　(2)$\sqrt[3]{2}$　(3)$\sqrt{3}$　(4)2　(5)π。　【107 中一中】

答：(3)(4)

解：原式$\Rightarrow \log_{2}(2x-3)\leq \log_{2}\dfrac{8}{(x+6)}$且$2x-3>0$且$x+6>0\Rightarrow (2x-3)\leq \dfrac{8}{(x+6)}$

且$x>\dfrac{3}{2}$且$x>-6\Rightarrow \dfrac{3}{2}<x\leq 2$

8. 測量聲音大小的分貝(d)與聲音強度(I)有下列關係式：

$d(I)=10\times\log_{10}\dfrac{I}{I_{0}}$，其中$I_{0}=10^{-12}$（瓦特／平方公尺）爲人類能聽到的最低聲音強度。如果一般人的交談音量約爲60分貝，請選出正確的選項：

(1)分貝增加10時，聲音強度增加爲原來的10倍

(2)分貝增加100時，聲音強度增加爲原來的100倍

(3)處於聲音強度$I=2\times 10^{-5}$（瓦特／平方公尺）的中一中教室，其聲音介於75到80分貝

(4)跨年演唱會中測得聲音約爲120分貝，此跨年演唱會聲音強度是一般人交談聲音強度的10^{6}倍

俞同學 107/1/27 寫的作業

(5)當100個人同時以一般人的交談音量發聲時，被測得的聲音約爲100分貝（設n個人的聲音強度是一個人的n倍）。【107 中一中】

答：(1)(4)

解：(1)(2)強度增爲10^k倍，分貝數增加$10k$

(3) $d(I)=10\times\log\dfrac{2\times10^{-5}}{10^{-12}}=10[7.3010]=73.01$　(4)正確　(5)應爲80分貝

第貳部分：選填題

A. 設$f(x)=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$），若$f(3)-f(2)=1$，則$f(4.5)+f(0.5)$的值爲________。【107 中一中】

答：2

解：$f(3)-f(2)=\log_a\dfrac{3}{2}=1\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$，故$f(4.5)+f(0.5)=\log_a\dfrac{9}{4}=2$

B. 已知$\log x$的尾數是$\log0.017$的尾數之2倍，且$\log x$的首數與$\log2018.01$的首數相等，則x的值爲________。【107 中一中】

答：2890

解：$\log0.017=\log1.7\times10^{-2}=-2+\log1.7$

$\log2018.01=\log2.01801\times10^{3}=3+\log2.01801$

$\log x=3+2\log1.7=\log10^{3}\times2.89=\log2890$

C. 設$-1\le x\le1$，已知$f(x)=a^{2x}+2a^{x}-1$（$a>0$且$a\neq1$）的最大值爲14，則a的值爲________或________。（化成最簡分數）【107 中一中】

答：3或$\dfrac{1}{3}$

解：$a^{2x}+2a^{x}-1=14\Rightarrow\left(a^{x}+5\right)\left(a^{x}-3\right)=0\Rightarrow a^{x}=3$

但$f(x)=\left(a^{x}+1\right)^{2}-2$，表$\begin{cases}a>1\text{時：}a^{1}=3\Rightarrow a=3\\0<a<1\text{時，}a^{-1}=3\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

D. <u>小明</u>利用智慧型手機上的計算機功能操作指數與對數的運算，當他依序鍵入$\boxed{3}$、$\boxed{x^y}$、$\boxed{5}$、$\boxed{=}$時，結果依序顯示「3」、「3∧」、「3∧5」、「243」，表示「$3^5=243$」；當他依序鍵入$\boxed{\log}$、$\boxed{3}$、$\boxed{)}$、$\boxed{=}$時，結果依序顯示「log(」、「log(3」、「log(3)」、「0.4771212547197」，表示「$\log3\approx0.4771212547197$」。如果<u>小明</u>依序鍵入$\boxed{8}$、$\boxed{x^y}$、$\boxed{(}$、$\boxed{\log}$、$\boxed{5}$、$\boxed{)}$、$\boxed{\div}$、$\boxed{\log}$、$\boxed{2}$、$\boxed{)}$、$\boxed{)}$、$\boxed{=}$，那麼最後的結果會顯示________。【107 中一中】

答：125

解：$8^{\left(\frac{\log5}{\log2}\right)}=8^{\log_2 5}=8^{\log_8 125}=125$

俞同學 107/1/27 寫的作業

E. 在坐標平面上，水平線 $y=k$ 與 $y=2^{x}$ 的圖形、$y=2^{x+2}$ 的圖形分別交於 A、B 兩點，過點 A 的鉛直線與 $y=2^{x+2}$ 的圖形交於點 C，過點 B 的鉛直線與 $y=2^{x}$ 的圖形交於點 D。已知四邊形 $ACBD$ 的面積為 45，則 k 的值為________。【107 中一中】

答：12

解：$\left.\begin{array}{l} A\left(\log_2 k, k\right), B\left(\log_2 \dfrac{k}{4}, k\right) \\ C\left(\log_2 k, 4k\right), D\left(\log_2 \dfrac{k}{4}, \dfrac{k}{4}\right) \end{array}\right\}$ $ACBD$ 面積 $=\left(3k+\dfrac{3k}{4}\right)\times 2\times\dfrac{1}{2}=45 \Rightarrow k=12$

F. 若 k 為一整數，且 $x=\log_3 k$ 滿足 $7^{x+1}=3^{x^2-1}$，則 k 的值為________。【107 中一中】

答：21

解：原式 $\Rightarrow (x+1)\log 7=\left(x^2-1\right)\log 3 \Rightarrow \log 7=(x-1)\log 3 \Rightarrow x=1+\log_3 7=\log_3 21$

G. 已知 $10=2^3+2$ 可用二進位表示為 $(1010)_2$，是二進位中的 4 位數；
$100=2^6+2^5+2^2$ 可用二進位表示為 $(1100100)_2$，是二進位中的 7 位數。
請問 10^{100} 是二進位中的________位數。【107 中一中】

答：333

解：$10^{100}=2^k \Rightarrow 100=k\log 2 \Rightarrow k=332.\cdots$

H. 設 n 為正整數，已知 n^n 以十進位數字表示時，它是 43 位數，則它的最左邊兩位數字由左而右依序為________、________。【107 中一中】

常用對數表 $y=\log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038

答：2、5

解：$42\le \log n^n<43$，且 $\log 10^{10}=10$，$\log 20^{20}=26.02$，$\log 30^{30}=44.313$

俞同學 107/1/27 寫的作業