大學入學考試中心研究用試卷
（卷六）數學 M107136

俞克斌老師　編授

題組 A

小華到某電信公司新辦一個門號。電信公司告知：中途解約時，違約金的計算方式如下：

（設備補貼款＋已享月租費折扣總金額）×（合約未到期日數÷合約日數）

小華的合約日數為 900 天，設備補貼款為 6000 元，月租費折扣為每日 10 元。

例如：小華使用 300 天後解約，則違約金的計算方式如下：

$$\left(6000+10\times 300\right)\times\frac{900-300}{900}$$

A-1.（單選題：列號①）

如果小華使用 x 天後解約（x 為正整數，$1\le x\le 900$），則違約金的計算方式為下列哪一個選項？

(1)$\frac{1}{90}x^2-\frac{10}{3}x+6000$　(2)$\frac{1}{90}x^2-\frac{20}{3}x+6000$　(3)$\frac{1}{90}x^2-10x+6000$

(4)$\frac{-1}{90}x^2+\frac{10}{3}x+6000$　(5)$\frac{-1}{90}x^2+\frac{20}{3}x+6000$。

答：(4)

解：$\left(6000+10x\right)\times\frac{900-x}{900}=-\frac{1}{90}x^2+\frac{10}{3}x+6000$

A-2.（選填題：列號②，③，④）

承上題，當 x 為________天時，違約金會達到最大值。

答：150

解：$-\frac{1}{90}x^2+\frac{10}{3}x+6000=-\frac{1}{90}\left(x-150\right)^2+6250$

當 $x=150$（天）時會有最大違約金 6250（元）

題組 B

足球比賽中，若在正規時間終止時兩隊依舊平手，則會進入十二碼大戰（Penalty shoot-out，縮寫 PSO），又稱 PK 戰（日本、台灣常用）。

由以往的 PK 戰資料顯示，某隊的守門員小新會以下列方式防守：

(一)小新在每次的防守必向右撲接或向左撲接兩種，

(二)若此次小新向右撲接，則下次也是向右撲接的機率為 $\frac{2}{3}$，

(三)若此次小新向左撲接，則下次也是向左撲接的機率為 $\frac{3}{4}$。

B-1.（單選題：列號⑤）

在某一場的 PK 戰中，小新第 1 次為向右撲接，則第 3 次會向左撲接的機率為下列哪一個選項？

(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{2}{3}$　(3)$\frac{19}{36}$　(4)$\frac{17}{36}$　(5)1。

答：(4)

解：$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{第一次}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\text{第二次}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{19}{36} \\ \frac{17}{36} \end{bmatrix}}_{\text{第三次}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{203}{432} \\ \frac{229}{432} \end{bmatrix}}_{\text{第四次}}$

B-2.（單選題：列號⑥）

令p_n、q_n分別代表小新第n次向右撲接與向左撲接的機率，其中$n=1,2,3,4,5$，並寫成機率矩陣爲$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$。假設5次撲接中的轉移矩陣爲$A$，則$A$爲下列哪個選項？

(1) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$。

答：(2)

解：仍爲$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

B-3.（多選題：列號⑦）

令p_n、q_n分別代表小新第n次向右撲接與向左撲接的機率，其中$n=1,2,3,4,5$，並寫成機率矩陣爲$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$。已知$p_1=q_1=\frac{1}{2}$，且5次撲接中的轉移矩陣爲$A$，試選出正確的選項：

(1) $A\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix}$ (2) $A^5\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{bmatrix}$ (3) $A^2\begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{bmatrix}=A^4\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}$ (4) $p_2=1-q_2$

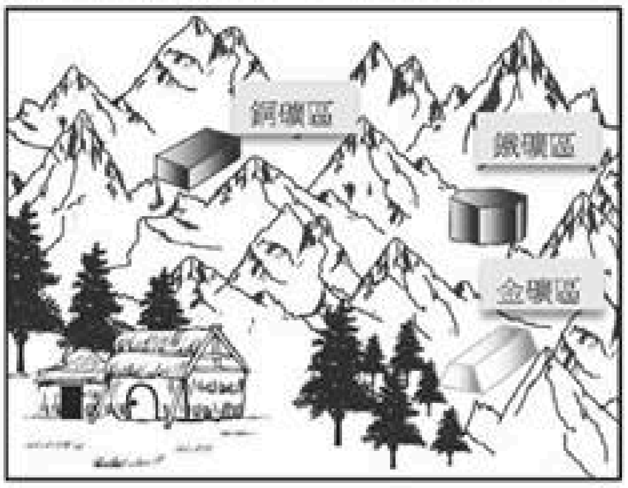
(5) $p_3<p_4$。

答：(1)(3)(4)

解：(5) $p_3=\frac{19}{36}>p_4=\frac{203}{432}$

題組 **C**

某款桌遊利用派遣村民採集礦石來獲得分數，如下示意圖。



C-1.（單選題：列號⑧）

當玩家每派遣一位村民去金礦區時，可擲一顆公正骰子一次，擲出5點或6點表示找到1個金礦，而擲出其它點數表示沒有找到金礦。今玩家派遣3位村民去金礦區，則有找到金礦的機率爲下列哪一個選項？

(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{2}{3}$　(3)$\frac{1}{27}$　(4)$\frac{8}{27}$　(5)$\frac{19}{27}$。

答：(5)

解：$1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$

C-2.（非選擇題）

當玩家每派遣一位村民去銅礦區時，須提供2份食物，方可生產出2個銅礦，而每個銅礦可得2分；當玩家每派遣一位村民去鐵礦區時，須提供3份食物，方可生產出5個鐵礦，而每個鐵礦可得1分。今玩家可派遣的村民上限爲10位，可提供的食物上限爲24份。

(1)去銅礦區的人數以x表示，去鐵礦區的人數以y表示，試寫出此問題的線性規劃不等式，並以x、y表示玩家此時可得到的分數。(4分)

(2)承(1)，試問應各派遣幾位村民去銅礦區和鐵礦區採集礦石，才能獲得最高的分數？又此時的分數爲多少？（8分）

答：(1) 如詳解　(2)當6位村民採銅礦、4位村民採鐵礦，可獲得最多分數44分

解：

	村民	食物	分數
銅礦區	x	$2x$	$(2\times 2)x$
鐵礦區	y	$3y$	$(1\times 5)y$
限制	≤ 10	≤ 24	Max

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y\le 10 \\ 2x+3y\le 24 \\ x,y\in N\cup\{0\} \end{cases}$$

目標函數：$f(x,y)=4x+5y$

(x,y)	$(0,8)$	$(6,4)$	$(10,0)$
$4x+5y$	40	44	40

當6位村民採銅礦、4位村民採鐵礦

可獲得最多分數44分