大學入學考試中心研究用試卷
（卷五）數學 M107135

俞克斌老師　編授

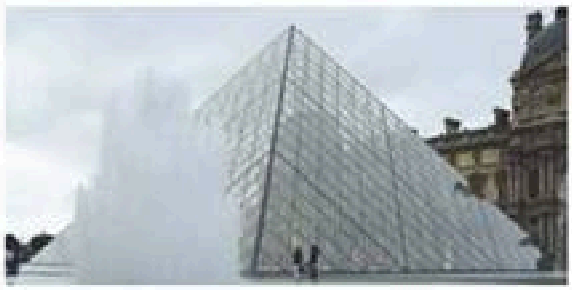
題組 A

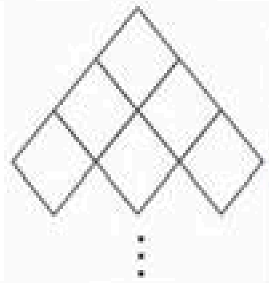
金字塔是底部爲一正方形、四個斜面皆爲等腰三角形的四角錐。

A-1.（單選題：列號①）

羅浮宮前的大金字塔，其中一個斜面主要由菱形窗格組合而成：第一層有1個菱形窗格、第二層有2個菱形窗格、第三層有3個菱形窗格、……，依此類推，如下圖所示。此斜面前17層菱形窗格的個數總和爲下列哪一個選項？

(1)120　(2)136　(3)153　(4)171　(5)190。





答：(3)

解：$1+2+3+\cdots+17=153$

A-2.（單選題：列號②）

埃及的卡夫拉金字塔高爲143.5公尺，底部正方形邊長爲215.25公尺，若斜面與水平面的夾角爲θ，其中$0°<\theta<90°$，則$\tan\theta$的值爲下列哪一個選項？

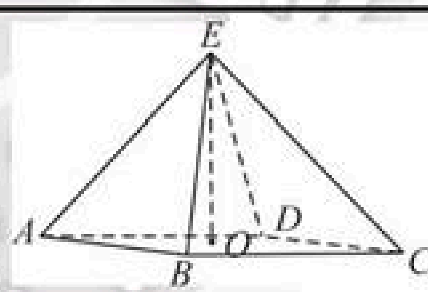
(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{2}{3}$　(3)1　(4)$\frac{4}{3}$　(5)$\frac{5}{3}$。

答：(4)

解：$\tan\theta=\frac{143.5}{107.625}=\frac{4}{3}$

A-3.（選填題：列號③，④，⑤）

今仿照埃及的卡夫拉金字塔之比例，建造了一個高爲4公尺的小型金字塔，設小型金字塔的頂點爲E點，且O點爲底面正方形$ABCD$的中心，如右圖所示，則O點到平面ABE的距離爲________公尺。(化爲最簡分數)



答：$\frac{12}{5}$

解：$h=4\cos\theta=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

題組 B

某一生物研究團隊從事海龜行爲研究。他們在一海龜身上裝設了發報器，從發報器顯示的數據中可以讀出海龜離岸邊的最短距離，例如：

當發報器顯示的數據爲1時，表示海龜在海裏且位置在離岸邊1公里處。

當發報器顯示的數據爲-1時，表示海龜已上岸且位置在離岸邊1公里處。

在一年的研究中，設 t 代表時間（以月爲單位），函數 $f(t)$ 代表時間 t 時發報器顯示的數據。
B-1.（多選題：列號⑥）
若此研究發現在這一年內發報器顯示的數據都小於30，試選出 $f(t)$ 可能的選項：
(1) $f(t)=\frac{1}{5}t^2-2t+4$　(2) $f(t)=t^4-2t^3+1$　(3) $f(t)=\log_2\left(t^2+5\right)$
(4) $f(t)=3\cos(2t+1)+20$　(5) $f(t)=2^t$。

答：(1)(3)(4)

解：(1) $f(t)=\frac{1}{5}(t-5)^2-1\xrightarrow{1\le t\le 12}-1\le f(t)\le\frac{44}{5}$

(2) $f(t)=t^3(t-2)+1\xrightarrow{1\le t\le 12}-\frac{11}{16}\le f(t)\le 17281$

(3) $1\le t\le 12\Rightarrow 1\le t^2\le 144\Rightarrow 6\le t^2+5\le 149\Rightarrow\underbrace{\log_2 6}_{2\cdots}\le f(t)\le\underbrace{\log_2 144}_{7,\cdots}$

(4) $-1\le\cos(2t+1)\le 1\Rightarrow 17\le f(t)\le 23$

(5) $\underbrace{2^1}_{2}\le f(t)\le\underbrace{2^{12}}_{4096}$

B-2.（多選題：列號⑦）
若此研究發現在這一年內發報器顯示的數據至少有三次恰爲5，試選出 $f(t)$ 可能的選項：
(1) $f(t)=4t^2-5t+4$　(2) $f(t)=2t(t-2)(t-4)$　(3) $f(t)=t^4-6t^3+7t^2+6t-3$
(4) $f(t)=2\sin(t+2)+4$　(5) $f(t)=10^{0.25t}+2$。

答：(2)(3)(4)

解：(1) $4t^2-5t+4=5\Rightarrow 4t^2-5t-1=0$，僅有兩個相異實根

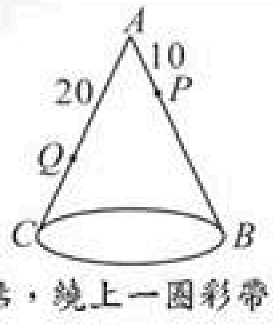
(2) $2t(t-2)(t-4)=5\Rightarrow 2t^3-12t^2+16t-5=0$，$0\le t\le 12$
由勘根定理得知：在區間 $(0,1)$、$(1,2)$、$(4,5)$ 內各有一實根

(3) $t^4-6t^3+7t^2+6t-3=5\Rightarrow t^4-6t^3+7t^2+6t-8=0$
$\Rightarrow(t+1)(t-1)(t-2)(t-4)=0\xrightarrow{0\le t\le 12}t=1$、$2$、$4$

(4) $2\sin(t+2)+4=5\Rightarrow\sin(t+2)=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow t+2=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$0\le t\le 12$，$k\in Z$
故 $t=-2+\frac{\pi}{6}+2\pi$、$-2+\frac{\pi}{6}+4\pi$、$-2+\frac{5\pi}{6}+2\pi$

(5) $y=10^{0.25t}+2$ 與 $y=5$ 僅交於一點

一、小華和班上的同學要準備一個生日派對活動，小華要負責用紙板製作一個正圓錐帽。設正圓錐帽的頂點爲 A，且 $\overline{BC}$ 爲帽圍的直徑（如右示意圖）。已知 $\overline{AB}=30$ 公分，$\overline{BC}=20$ 公分。
(1)試求這頂正圓錐帽的表面積爲多少平方公分？（4分）
(2)設 P、Q 兩點分別落在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AP}=10$ 公分、$\overline{AQ}=20$ 公分。今小華要從正圓錐帽上的 P 點經過 Q 點再回到 P 點，繞上一圈彩帶，試求此彩帶的最短長度爲多少公分？（8分）

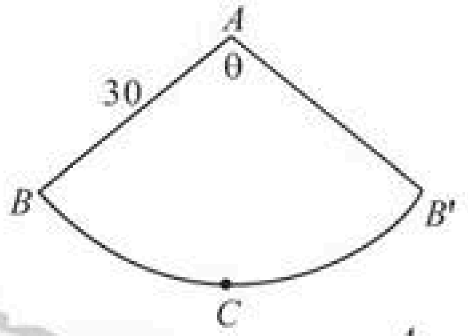


答：(1) 300π　(2) $20\sqrt{3}$

解：(1)帽圍周長 $=20\pi=$ 扇形弧長，

故扇形中心角 $=\dfrac{20\pi}{30}=\dfrac{2\pi}{3}$

故扇形面積 $=\dfrac{1}{2}\times 30^2\times\dfrac{2\pi}{3}=300\pi$



(2) $\overline{PQ}=\sqrt{10^2+20^2-2\times 10\times 20\times\cos\dfrac{\pi}{3}}=10\sqrt{3}$，

所求全長 $=20\sqrt{3}$