94年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編授

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. 試問整數43659共有多少個不同的質因數？
(1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個

答：(3)（數論：整數、因數、質數）

解：$43659=3^4\times7^2\times11\Rightarrow$ 質因數有3、7、11三個

2. 利用公式$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$，可計算出$11^3+12^3+\cdots+20^3$之值為
(1)41075　(2)41095　(3)41115　(4)41135　(5)41155

答：(1)（數列級數：自然級數Σ）

解：所求$=\sum_{k=1}^{20}k^3-\sum_{k=1}^{10}k^3=\left(\dfrac{20\times21}{2}\right)^2-\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2=44100-3025=41075$

3. 台北銀行最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：
購買者從 01~42 中任選六個號碼，
當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；
台北銀行曾考慮改發行「39選5」的小小樂透：
購買者從 01~39 中任選五個號碼，
如果這五個號碼與開出的五個號碼完全相同(不計次序)則得頭獎。
假設原來的小樂透中頭獎的機率是R，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是r。
試問比值$\dfrac{r}{R}$最接近下列哪個選項？
(1)3　(2)5　(3)7　(4)9　(5)11

答：(4)（機率：古典機率）

解：$\dfrac{r}{R}=\dfrac{C_6^{42}}{C_5^{39}}=\dfrac{\dfrac{42\cdot41\cdot40\cdot39\cdot38\cdot37}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}{\dfrac{39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}}=\dfrac{42\cdot41\cdot40}{36\cdot35\cdot6}=\dfrac{82}{9}\approx9.1\cdots$

4. 設a,b為正實數，已知$\log_7 a=11,\log_7 b=13$；
試問$\log_7(a+b)$之值最接近下列哪個選項？
(1)12　(2)13　(3)14　(4)23　(5)24

答：(2)（指數對數：對數運算律、常用對數）

解：$\log_7(a+b)=\log_7\left(7^{11}+7^{13}\right)=\log_7 7^{11}(1+49)=11+\dfrac{\log50}{\log7}$

$\approx11+\dfrac{1.6990}{0.7781}\approx11+2.18\cdots\approx13.18\cdots$

解：$\log_7(a+b)=\log_7\left(7^{11}+7^{13}\right)=\log_7 7^{11}(1+49)\approx\log_7 7^{13}\approx 13$

5. 某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；
考慮到可能是同學們適應不良所致，
數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以10作爲正式紀錄的成績。
今隨機抽選100位同學，發現調整後的成績其平均爲65分，標準差爲15分；
試問這100位同學未調整前的成績之平均M介於哪兩個連續正整數之間？
(1)$40\le M<41$ (2)$41\le M<42$ (3)$42\le M<43$ (4) $43\le M<44$ (5)$44\le M<45$

答：(5)（統計：算術平均數、標準差）

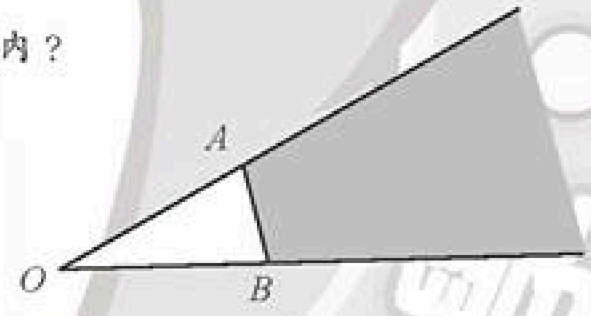
解：$S_{後}=\sqrt{\dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_{i後}^2-\overline{X_{後}}^2}\Rightarrow 15=\sqrt{\dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\left(10\sqrt{x_{i前}}\right)^2-65^2}$

$\Rightarrow\left(15^2+65^2\right)\times 100=\sum_{i=1}^{100}100\,x_{i前}\Rightarrow 4450=\sum_{i=1}^{100}x_{i前}$

故$M=\overline{X_{前}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{100}x_{i前}}{100}=\dfrac{4450}{100}=44.5$

貳、多選題

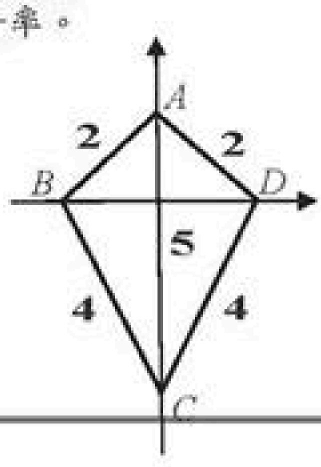
6. 如右圖所示，兩射線OA與OB交於O點，
試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？
(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (2) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
(3) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (4) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$
(5)$\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OB}$



答：(1)(2)（平面向量：線性組合）

解：以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$爲基底，$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$終點落在陰影區域內$\Rightarrow\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$且$\alpha+\beta>1$

7. 如右圖所示，坐標平面上一菱形$ABCD$，
其中A,C在y軸上，B,D在x軸上，且$\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AC}=5$。
令m_{AB}、m_{BC}、m_{CD}、m_{DA}分別表直線AB、BC、CD、DA之斜率。
試問以下哪些敘述成立？
(1)此四數值中以m_{AB}爲最大
(2)此四數值中以m_{BC}爲最小
(3)$m_{BC}=-m_{CD}$
(4)$m_{AB}\times m_{BC}=-1$
(5)$m_{CD}+m_{DA}>0$



答：(2)(3)(5)**（平面上直線：斜率）**

解：(1)(2) $m_{CD} > m_{AB} > 0 > m_{AD} > m_{BC}$

(3)因爲 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{DC}$ 關於 y 軸成對稱，故 $m_{BC} = -m_{CD}$

(4)因爲 ΔABC 不是直角三角形，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 互不垂直，故 $m_{AB} \times m_{BC} \neq -1$

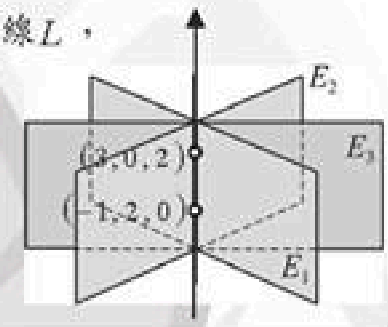
(5) $\underbrace{m_{CD}}_{\text{正多}} + \underbrace{m_{DA}}_{\text{負少}} > 0$

8. 假設坐標空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3 皆通過 $(-1,2,0)$ 與 $(3,0,2)$ 兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？
(1) $(2,2,2)$ (2) $(1,1,1)$ (3) $(4,-2,2)$ (4) $(-2,4,0)$ (5) $(-5,-4,-2)$

答：(2)**（空間中直線：方向向量、參數式）**

解：三相異平面 E_1、E_2、E_3 交於通過 $(-1,2,0)$ 與 $(3,0,2)$ 兩點直線 L，

$\overrightarrow{L} = (4,-2,2) // (2,-1,1)$，故 L：$\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2-t \\ z = 0+t \end{cases}$



僅有 (2) $(1,1,1) \in L$

9. 若 $0° < \theta < 45°$，試問以下哪些選項恆成立？
(1) $\sin\theta < \cos\theta$ (2) $\tan\theta < \sin\theta$ (3) $\cos\theta < \tan\theta$ (4) $\sin 2\theta < \cos 2\theta$
(5) $\tan\frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta$

答：(1)(5)**（三角：比大小、倍角公式）**

解：$0° < \theta < 45°$ (1) $\sin\theta < \cos\theta$ (2) $\tan\theta > \sin\theta$

(3) $\cos\theta$、$\tan\theta$ 不確定正負

（θ 接近 $0°$ 時：$\cos\theta > \tan\theta$，θ 接近 $45°$ 時：$\cos\theta < \tan\theta$）

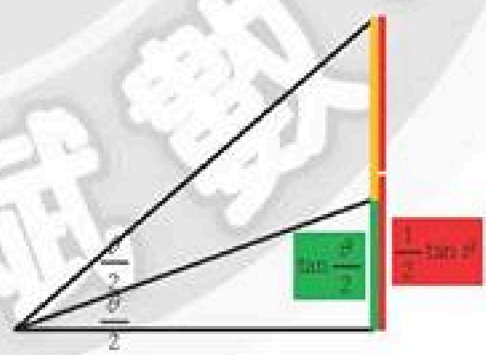
$0° < 2\theta < 90°$ (4) $\sin 2\theta$、$\cos 2\theta$ 不確定正負

（$0° < 2\theta < 45°$ 時：$\sin 2\theta < \cos 2\theta$，$45° < 2\theta < 90°$ 時：$\sin 2\theta > \cos 2\theta$）

$0° < \frac{\theta}{2} < 22.5°$ (5) $\tan\frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

（因爲 $0 < \tan\frac{\theta}{2} < \left(\sqrt{2}-1\right)$

$\Rightarrow 0 < \tan^2\frac{\theta}{2} < \left(3-2\sqrt{2}\right)$）



10. 設 F_1 與 F_2 爲坐標平面上雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的兩個焦點，
P 爲 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形。
試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的周長？
(1)20 (2)24 (3)28 (4)32 (5)36

答：(2)(5)（圓錐曲線：雙曲線）

解：原雙曲線 $a=3$、$b=4$、$c=5$

若 $\overline{F_1F_2}=\overline{PF_2}=10$

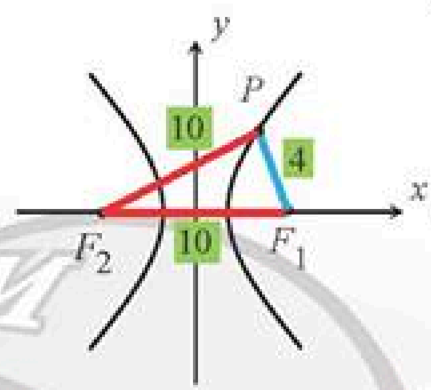
$\xrightarrow{\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a=6}\overline{PF_1}=4$

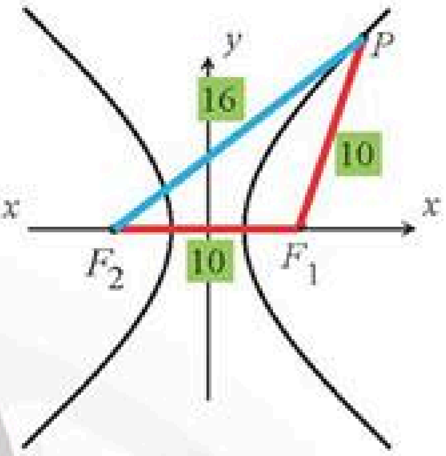
周長為 $10+10+4=24$（如左圖）

若 $\overline{F_1F_2}=\overline{PF_1}=10$

$\xrightarrow{\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a=6}\overline{PF_2}=16$

周長為 $10+10+16=36$（如右圖）



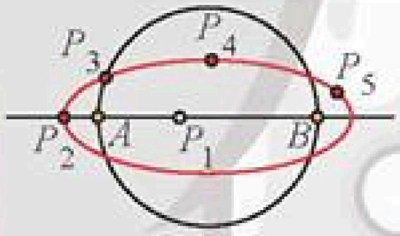


11. 設 S 為空間中一球面，$\overline{AB}$ 為其一直徑，且 $\overline{AB}=10$。若 P 為空間中一點，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$，則 P 點的位置可能落在哪裡？
(1) 線段 $\overline{AB}$ 上；
(2) 直線 $\overline{AB}$ 上，但不在線段 $\overline{AB}$ 上；
(3) 球面 S 上；
(4) 球 S 的內部，但不在線段 $\overline{AB}$ 上；
(5) 球 S 的外部，但不在直線 $\overline{AB}$ 上。

答：(2)(3)(4)(5)（圓錐曲線：橢圓）

解：$\overline{AB}$ 為一圓直徑，

$\overline{PA}+\overline{PB}=14$，$P$ 為以 A、B 為焦點的橢圓上的點



第二部分：填充題

A. 若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則 $p=$______，$q=$______。

答：$p=3$、$q=8$（多項式：多項式乘法與除法運算）

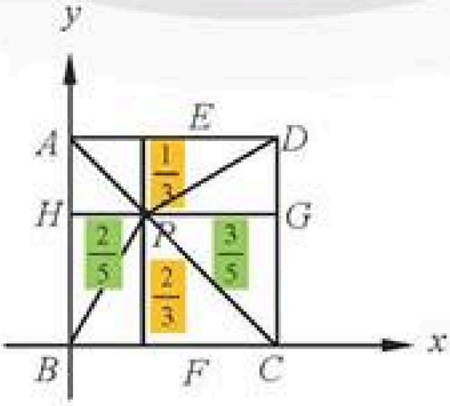
解：利用比較係數法或長除法：

$x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q=\left(x^2+x+2\right)\left(x^3+0x^2-x+4\right)$，故 $p=3$、$q=8$

B. 在坐標平面上，
正方形 $ABCD$ 的四個頂點坐標分別為 $A(0,1)$，$B(0,0)$，$C(1,0)$，$D(1,1)$。
設 P 為正方形 $ABCD$ 內部的一點，若 ΔPDA 與 ΔPBC 的面積比為 $1:2$，
且 ΔPAB 與 ΔPCD 的面積比為 $2:3$，則 P 點的坐標為_____。(化成最簡分數)

答：$\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$（座標幾何）

解：



C. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，
每次向正方向或負方向跳1個單位，跳動過程可重複經過任何一點。
若經過6次跳動後運動物體落在點$+4$處，
則此運動物體共有______種不同的跳動方法。

答：6（排列組合：不盡相異物直線排列）

解：設此物體向正方向跳x次，向負方向跳y次，則$\begin{cases}x+y=6\\x-y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

即5次往右跳一單位，1次往左跳一單位，因此共有$\dfrac{(5+1)!}{5!\cdot1!}=6$種跳動方法

D. 設複數$z=1-i$；若$1+z+z^2+\cdots+z^9=a+bi$，其中a,b為實數，
則$a=$______，$b=$______。

答：$a=32$、$b=-1$（數論：虛數複數）

解：$1+z+z^2+\cdots+z^9=\dfrac{1\left[1-z^{10}\right]}{1-z}=\dfrac{1-(1-i)^{10}}{1-(1-i)}=\dfrac{1-(-2i)^5}{i}=\dfrac{1+32i}{i}=32-i$

E. 設O為坐標平面上的原點，P點坐標為$(2,1)$；
若A、B分別是正x軸及正y軸上的點，使得$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，
則ΔOAB面積的最大可能值為______。(化成最簡分數)

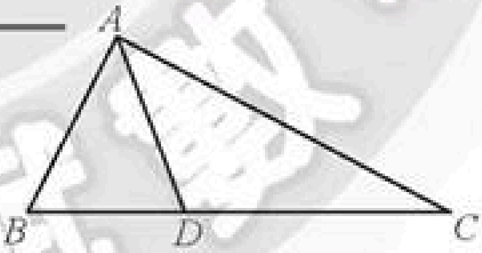
答：$\dfrac{25}{16}$（平面向量：內積、算幾不等式）

解：$A(x,0)$、$B(0,y)$，故$\overrightarrow{PA}=(x-2,-1)$、$\overrightarrow{PB}=(-2,y-1)$

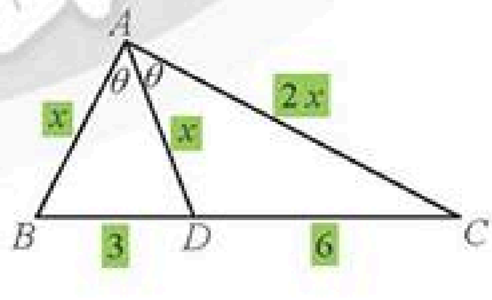
$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-2x+4-y+1=0\Rightarrow2x+y=5$，而$\Delta OAB$面積$\dfrac{xy}{2}$

算幾不等式：$\dfrac{2x+y}{2}\ge\sqrt{2x\cdot y}\Rightarrow\dfrac{25}{4}\ge2xy\Rightarrow\dfrac{xy}{2}\le\dfrac{25}{16}$

F. 如右圖所示，在ΔABC中，
$\angle BAC$的平分線$\overline{AD}$交對邊$\overline{BC}$於D；
已知$\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且$\overline{AB}=\overline{AD}$，
則$\cos\angle BAD$之值為______。(化成最簡分數)



答：$\dfrac{3}{4}$（三角：餘弦定律）



解：$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，$\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$

由內角平分線定理：$\overline{AB}=x$，$\overline{AC}=2x$

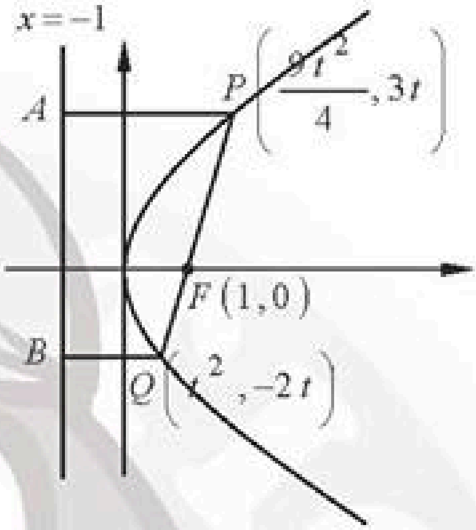
由餘弦定律：$\cos\angle BAD=\cos\angle CAD$

$\Rightarrow\dfrac{x^2+x^2-3^2}{2\times x\times x}=\dfrac{x^2+(2x)^2-6^2}{2\times x\times 2x}$，

故$x^2=18$，則$\cos\angle BAD=\dfrac{3}{4}$

G. 在坐標平面上，過$F(1,0)$的直線交拋物線$\Gamma: y^2=4x$於P、Q兩點，
其中P在上半平面，且知$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則$P$點的$x$坐標為______。
(化成最簡分數)

答：$\dfrac{3}{2}$（圓錐曲線：拋物線）



解：已知$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，且$P$、$Q$分別在上、下半平面
P、F、Q共線：斜率$m_{PF}=m_{FQ}$

$$\Rightarrow \frac{3t}{\frac{9t^2}{4}-1}=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow t^2=\frac{2}{3}$$

故$P\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{6}\right)$、$Q\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

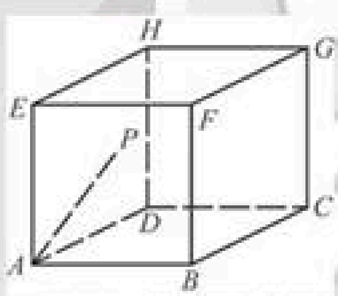
H. 設x為一正實數且滿足$x\cdot 3^x=3^{18}$；若x落在連續正整數k與$k+1$之間，
則$k=$______。

答：15（多項函數：勘根定理）

解：令$f(x)=x\cdot 3^x-3^{18}\Rightarrow\begin{cases} f(15)=15\times 3^{15}-3^{18}=3^{15}(15-27)<0 \\ f(16)=16\times 3^{16}-3^{18}=3^{16}(16-9)>0 \end{cases}$

由勘根定理得知：$f(x)=x\cdot 3^x-3^{18}=0$在區間$(15,16)$內有實根，故k取15

I. 如右圖所示，$ABCD-EFGH$為邊長等於1之正立方體。
若P點在立方體之內部且滿足
$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，
則P點至直線AB之距離為______。(化成最簡分數)



答：$\dfrac{5}{6}$（空間：空間座標、空間向量）

解：$A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$D(0,1,0)$、$E(0,0,1)$
由$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，故$P\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$

$$\text{所求}=d\left(P,\overleftrightarrow{AB}\right)=d(P,x\text{軸})=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$$