93 年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編校

第一部分： 選擇題

壹、單一選擇題

1. 已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和爲15，偶數項之和爲30，則下列哪一選項爲此數列之公差？
(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5

答：(3)（數列級數：等差數列級數）

解：$\underbrace{\left(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)}_{30}-\underbrace{\left(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9\right)}_{15}=5d\Rightarrow d=3$

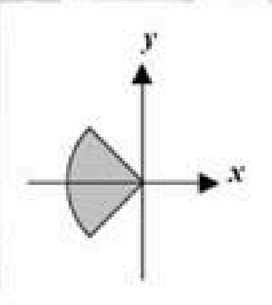
2. 下列選項中的數，何者最大？ [其中$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$]
(1)100^{10}　(2) 10^{100}　(3)50^{50}　(4) $50!$　(5)$\dfrac{100!}{50!}$

答：(2)（指數對數：指數運算律）

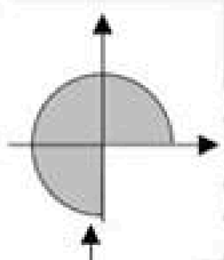
解：(1)$100^{10}=10^{20}<10^{100}$　(2) 10^{100}　(3)$50^{50}=\dfrac{10^{100}}{2^{50}}<10^{100}$

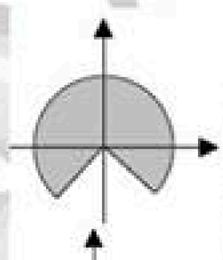
(4) $50!<50^{50}<100^{50}=10^{100}$　(5)$\dfrac{100!}{50!}<100^{50}=10^{100}$

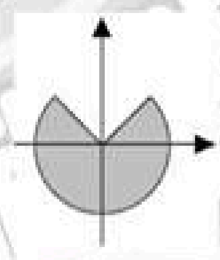
3. 右圖陰影部分所示爲複數平面上區域
$A=\left\{z\,\middle|\,z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right),0\le r\le1,\dfrac{3\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{4}\right\}$之略圖。

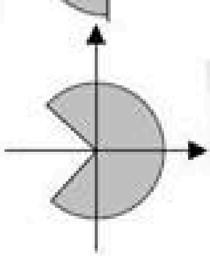


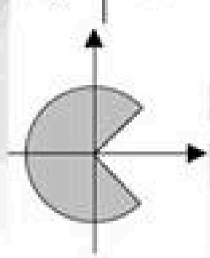
令$D=\left\{w\,\middle|\,w=z^3\ ,z\in A\right\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域$D$最接近？

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


答：(5)（複數極式：棣美弗定理）（非學測範圍）

解：$D=\left\{w\,\middle|\,w=z^3=r^3\left(\cos3\theta+i\sin3\theta\right),0\le r^3\le1,\dfrac{9\pi}{4}\le3\theta\le\dfrac{15\pi}{4}\right\}$

4. 在坐標空間中給定兩點 $A(1,2,3)$ 與 $B(7,6,5)$。

令 S 爲 xy 平面上所有使得向量 $\overrightarrow{PA}$ 垂直於向量 $\overrightarrow{PB}$ 的 P 點所成的集合，則

(1) S 爲空集合 (2) S 恰含一點 (3) S 恰含兩點

(4) S 爲一線段 (5) S 爲一圓

答：(1) **（空間：空間向量、向量內積）**

解：$P(x,y,0)\in xy$ 平面，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x,2-y,3)\cdot(7-x,6-y,5)=0$

$\Rightarrow (x-4)^2+(y-4)^2=-2$，無解

5. 設 ΔABC 爲平面上的一個三角形，P 爲平面上一點且 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，

其中 t 爲一實數。試問下列哪一選項爲 t 的最大範圍，使得 P 落在 ΔABC 的內部？

(1) $0<t<\frac{1}{4}$ (2) $0<t<\frac{1}{3}$ (3) $0<t<\frac{1}{2}$

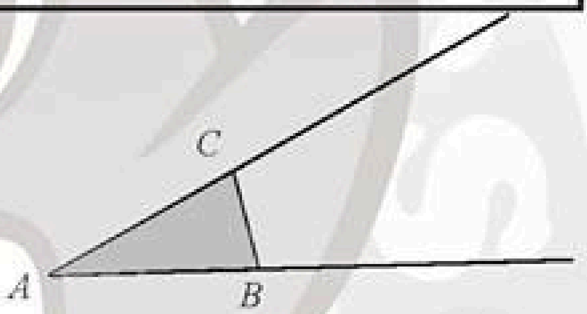
(4) $0<t<\frac{2}{3}$ (5) $0<t<\frac{3}{4}$

答：(4) **（平面向量：線性組合）**

解：以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 爲基底，

$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ 終點落在陰影區域內

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$ 且 $\alpha+\beta<1$



6. 台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交價)的漲、跌7%範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在93元至107元之間。假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股40元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌7%)，緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲7%)。請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？

(1)39元 (2) 39.5元 (3) 40元 (4) 40.5元 (5)41元

答：(1) **（指數對數：指數運算律、對數運算律、內插法、對數查表）**

解：$40\times(1-7\%)^5\times(1+7\%)^5=40\times(1-0.0049)^5=40\times(0.9951)^5\approx 39.02\cdots$

解：$40\times(1-7\%)^5\times(1+7\%)^5=40\times(1-0.0049)^5$

$=40\times\left(C_0^5-C_1^5\times 0.0049+C_2^5\times 0.0049^2+\cdots+C_5^5\times 0.0049^5\right)$

$\approx 40\times\left(C_0^5-C_1^5\times 0.0049+\cdots\right)\approx 40\times(1-0.0245+0.\cdots)\approx 39.02\cdots$

解：$\log\left[40\times(1-7\%)^5\times(1+7\%)^5\right]=\log\left[40\times(1-0.0049)^5\right]=\log\left[40\times(0.9951)^5\right]$

$=\log 40+5\log 0.9951\xrightarrow{\text{查表或內插法}}\approx(1+0.6020)+5(0.9978-1)\approx 1.591$

$\xrightarrow{\text{查表或內插法}}\approx\log 10+\log 3.90\approx\log 39.0$

貳、多重選擇題

7. 中山高速公路重慶北路交流道南下入口匝道分成內、外兩線車道，
路旁立有標誌「外側車道　大客車專用」。
請選出**不違反**此規定的選項：
(1)小型車行駛內側車道　(2)小型車行駛外側車道
(3)大客車行駛內側車道　(4)大客車行駛外側車道
(5)大貨車行駛外側車道

答：(1)(3)(4)　**（邏輯：敘述、命題、同義）**

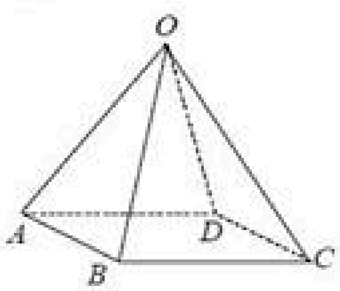
解：「外側車道　大客車專用」，故(4)對，(2)(5)錯
「內側車道　各種車均可行駛」，故(1)(3)對

8. 在坐標平面上，下列哪些方程式的圖形可以放進一個夠大的圓裡面？
(1) $3x=2y^2$　(2) $3x^2+2y^2=1$　(3) $3x^2-2y^2=1$
(4) $|x+y|=1$　(5) $|x|+|y|=1$

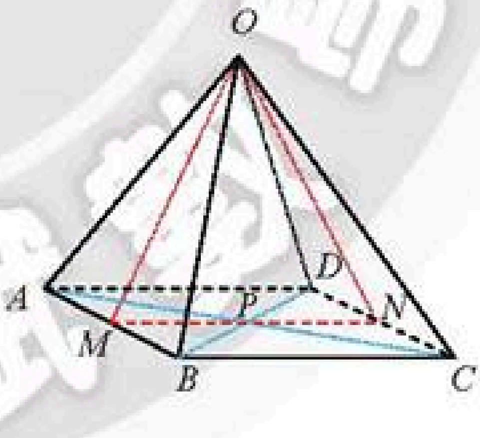
答：(2)(5)　**（圓錐曲線：拋物線、橢圓、雙曲線、圓）**

解：必須「有限範圍」才能「放進一個夠大的圓裡面」

9. 如右圖 $O-ABCD$ 爲一金字塔，底是邊長爲1之正方形，
頂點 O 與 A、B、C、D 之距離均爲2。試問下列哪些式子是正確的？
(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$
(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$
(5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$



答：(3)(4)　**（空間：空間向量、向量合成、內積）**



解：(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\neq\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{ON}\neq\vec{0}$

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|\cos\angle COD$

$\because \angle AOB=\angle COD \quad \therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5) $\because \cos\angle AOC=\dfrac{2^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\times2\times2}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle AOC=2\times2\times\dfrac{3}{4}=3$

10. 從1，2，...，10這十個數中隨意取兩個，
以 p 表示其和爲偶數之機率，q 表示其和爲奇數之機率。試問下列哪些敘述是正確的？

(1) $p+q=1$　(2) $p=q$　(3) $|p-q|\le\frac{1}{10}$　(4) $|p-q|\ge\frac{1}{20}$　(5) $p\ge\frac{1}{2}$

答：(1)(4) （機率：古典機率）

解：$p=\dfrac{C_2^5+C_2^5}{C_2^{10}}=\dfrac{10+10}{45}=\dfrac{4}{9}$、$q=\dfrac{C_1^5\times C_1^5}{C_2^{10}}=\dfrac{5\times5}{45}=\dfrac{5}{9}$，$|p-q|=\dfrac{1}{9}$

11. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。
試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $f(1-i)=0$　(2) $f(2+i)\ne0$　(3)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$
(4)沒有實數 x 滿足 $f\left(x^3\right)=0$　(5)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$

答：(1)(5) （方程式：成雙定理、勘根定理）

解：(1) $f(x)$ 為實係數，且 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 的根，由成雙定理知 $1-i$ 亦為 $f(x)=0$ 的根
(2)但 $\deg f(x)=3$，故第三根必為實根，亦即 $2+i$ 必不為 $f(x)=0$ 的根
(3) $\deg[f(x)-x]=3$，為奇數次方，且為實係數，故至少一實根
(4) $\deg f\left(x^3\right)=9$，為奇數次方，且為實係數，故至少一實根
(5)由勘根定理得知，在區間 $(0,2)$ 內有一實根，則 $\begin{cases}x>2\text{時，}f(x)\text{恆正}\\x<0\text{時，}f(x)\text{恆負}\end{cases}$

第二部分： 填充題

A. 某數學老師計算學期成績的公式如下：
五次平時考中取較好的三次之平均值佔30%，兩次期中考各佔20%，期末考佔30%。
某生平時考成績分別為68、82、70、73、85，期中考成績分別為86、79，期末考成績為90，則該生學期成績為______。(計算到整數為止，小數點以後四捨五入)

答：84（統計：平均數）

解：$\left(\dfrac{73+82+85}{3}\right)\times30\%+(86+79)\times20\%+(90)\times30\%=24+33+27=84$

B. 某電視台舉辦抽獎遊戲，現場準備的抽獎箱裡放置了四個分別標有1000、800、600、0元獎額的球。參加者自行從抽獎箱裡摸取一球(取後即放回)，主辦單位即贈送與此球上數字等額的獎金，並規定抽取到0元的人可以再摸一次，但是所得獎金折半(若再摸到0就沒有第三次機會)；則一個參加者可得獎金的期望值是_____元。
(計算到整數為止，小數點以後四捨五入)

答：675（機率與統計：期望值）（非學測範圍）

解：

事件	1000元	800元	600 元	0＋(1000)	0＋(800)	0＋(600)	0＋0
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
利益	1000元	800元	600 元	500 元	400 元	300 元	0 元

$$E(X)=1000\times\frac{1}{4}+800\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{16}+400\times\frac{1}{16}+300\times\frac{1}{16}=675$$

C. 設a,b,c爲正整數，若$a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，
則$a+b+c=$______

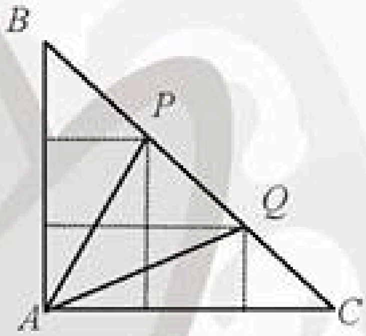
答：15 **（指數對數：對數運算律）**

解：$\log_{520}2^a+\log_{520}5^b+\log_{520}13^c=\log_{520}2^a\times5^b\times13^c=3\Rightarrow2^a\times5^b\times13^c=520^3$

$\Rightarrow2^a\times5^b\times13^c=\left(2^3\times5\times13\right)^3\Rightarrow a+b+c=9+3+3=15$

D. 設ΔABC爲一等腰直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$。若P、Q爲斜邊$\overline{BC}$的三等分點，
則$\tan\angle PAQ=$__________。(化成最簡分數)

答：$\frac{3}{4}$ **（三角：餘弦定律）**



解：利用『**餘弦定律**』

$$\cos\theta=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2.\ \sqrt{5}.\ \sqrt{5}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

則$\sin\theta=\frac{3}{5}$，故$\tan\theta=\frac{3}{4}$

E. 某高中招收高一新生共有男生1008人、女生924人報到。學校想將他們依男女合班的原則平均分班，且要求各班有同樣多的男生，也有同樣多的女生；考量教學效益，並限制各班總人數在40與50人之間，則共分成________班

答：42 **（數論：整數論、因數倍數）**

解：$(1008,924)=84\Rightarrow$

1008男	84班×12男	42班×24男	28班×36男	⋯
924女	84班×11女	42班×22女	28班×33女	⋯
	每班23人	每班46人	每班69人	⋯

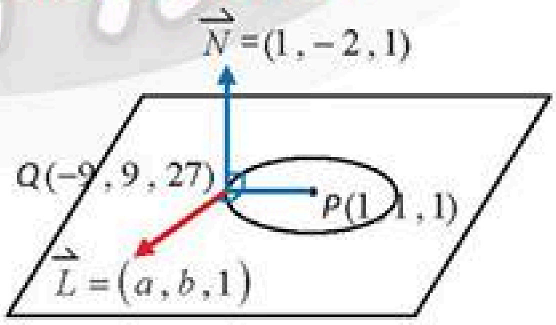
F. 在坐標空間中，平面$x-2y+z=0$上有一以點$P(1,1,1)$爲圓心的圓Γ，
而$Q(-9,9,27)$爲圓Γ上一點。若過Q與圓Γ相切的直線之一方向向量爲$(a,b,1)$，
則$a=$______，$b=$______。

答：$a=5$；$b=3$ **（空間中直線平面：法向量、方向向量、向量外積）**

解：設直線的方向向量$\overrightarrow{L}=(a,b,1)$

平面的法向量$\overrightarrow{N}=(1,-2,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(-10,8,26)=-2(5,-4,-13)$



$\because\begin{cases}\overrightarrow{L}\perp\overrightarrow{N}\\\overrightarrow{L}\perp\overrightarrow{PQ}\end{cases}\quad\therefore\overrightarrow{L}\,/\!/\left(\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{PQ}\right)$

$\left(\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{PQ}\right)=(1,-2,1)\times(5,-4,-13)=(30,18,6)/\!/(5,3,1)$

$\therefore a=5$；$b=3$

G. 設 $270^\circ < A < 360^\circ$ 且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004^\circ$。若 $A=m^\circ$，則 $m=$______。

答：306（三角函數：正餘弦函數疊合、角度互換）（非學測範圍）

解：$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A\right)=2\sin\left(A+30^\circ\right)$

$2\sin 2004^\circ=2\sin 204^\circ=-2\sin 24^\circ=2\sin\left(-24^\circ\right)=2\sin 336^\circ$

$270^\circ < A < 360^\circ \Rightarrow 330^\circ < A+30^\circ < 390^\circ$，故 $A+30^\circ=336^\circ \Rightarrow A=306^\circ$

H. 坐標平面上的圓 C：$(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有______個點與原點的距離正好是整數值。

答：12（圓：圓與點關係）

解：原點 $P(0,0)$ 與圓心 $O(7,8)$ 之間的距離

$=\sqrt{7^2+8^2}=\sqrt{113}\approx 10.\cdots$

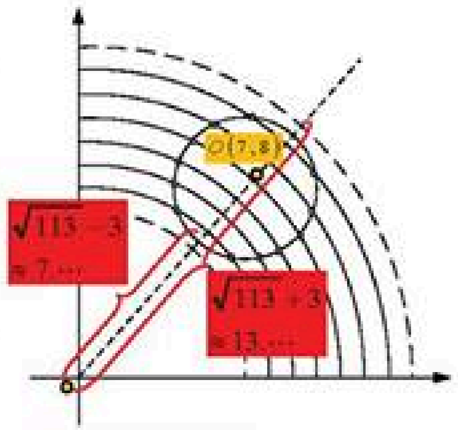
原半徑爲 $r=3$

所以只要以 $\underbrace{\sqrt{113}-3}_{\overline{OP}-r}<R<\underbrace{\sqrt{113}+3}_{\overline{OP}+r}$ 爲半徑的

新圓，均可與前圓有兩交點

而 $R\in Z$，故 $R=8$、9、10、11、12、13 均滿足

共計產生『12 個』交點



I. 在坐標平面上，設直線 L：$y=x+2$ 與拋物線 Γ：$x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點。若 F 表拋物線 Γ 的焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$______。

答：10（圓錐曲線：拋物線）

解：$x^2=4y$ 的焦距爲 1；準線爲 $y+1=0$

設 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

$\begin{cases}x^2=4y\\ y=x+2\end{cases}\Rightarrow (y-2)^2=4y$

$\Rightarrow y^2-8y+4=0$ 有兩根 y_1，y_2

$\Rightarrow$ 由根與係數知 $y_1+y_2=8$

由**拋物線定義**知 $\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PM}+\overline{QN}=\left(y_1+1\right)+\left(y_2+1\right)=10$