# 96 年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編校

## 壹、單選題

1. 設 $f(x)=ax^6-bx^4+3x-\sqrt{2}$，其中 $a$、$b$ 爲非零實數，則 $f(5)-f(-5)$ 之值爲
(1) $-30$　(2) $0$　(3) $2\sqrt{2}$　(4) $30$　(5)無法確定(與 $a$、$b$ 有關)　【96 學測】

答：(4)　**（99 課綱第一冊第二章多項式函數）（函數值、奇偶函數）**

解：所求 $=\left(a(5)^6-b(5)^4+3(5)-\sqrt{2}\right)-\left(a(-5)^6-b(-5)^4+3(-5)-\sqrt{2}\right)=30$

解：由奇函數、偶函數觀點，知所求 $=2\times 3(5)=30$

2. 試問共有多少個正整數 $n$ 使得坐標平面上通過點 $A(-n,0)$ 與點 $B(0,2)$ 的直線亦通過點 $P(7,k)$，其中 $k$ 爲某一正整數？
(1) 2 個　(2) 4 個　(3) 6 個　(4) 8 個　(5) 無窮多個　【96 學測】

答：(2)　**（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（斜率）**

解：同一條直線上的斜率處處相等

$$m_{AB}=m_{BP}\ \Rightarrow\ \frac{2-0}{0+n}=\frac{k-2}{7-0}\ \Rightarrow\ nk-2n=14\ \Rightarrow\ n(k-2)=14$$

$\xrightarrow{n,k\in N}$

| $n$ | 1 | 2 | 7 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| $k-2$ | 14 | 7 | 2 | 1 |

，共 4 組解。

3. 設某沙漠地區某一段時間的溫度函數爲 $f(t)=-t^2+10t+11$，其中 $1\le t\le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差爲
(1) 9　(2) 16　(3) 20　(4) 25　(5) 36　【96 學測】

答：(4)　**（99 課綱第一冊第二章多項式函數）（二次函數）**

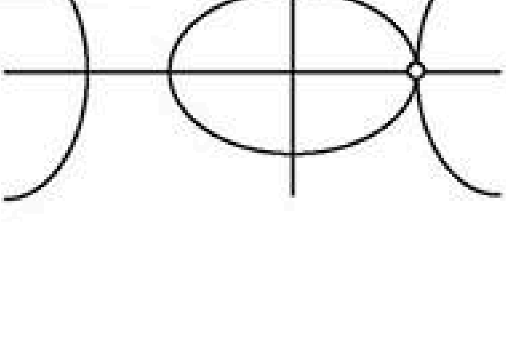
解：$f(t)=-t^2+10t+11=-(t-5)^2+36$

$1\le t\le 10\ \Rightarrow$ 當 $t=5$ 時，有最大值 36；當 $t=10$ 時，有最小值 11，
最大溫差爲 $36-11=25$

4. 坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的圖形與 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的圖形共有幾個交點？
(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個　【96 學測】

答：(1)　**（99 課綱第四冊第四章二次曲線）（橢圓、雙曲線）**

解：看圖說話，恰一個交點

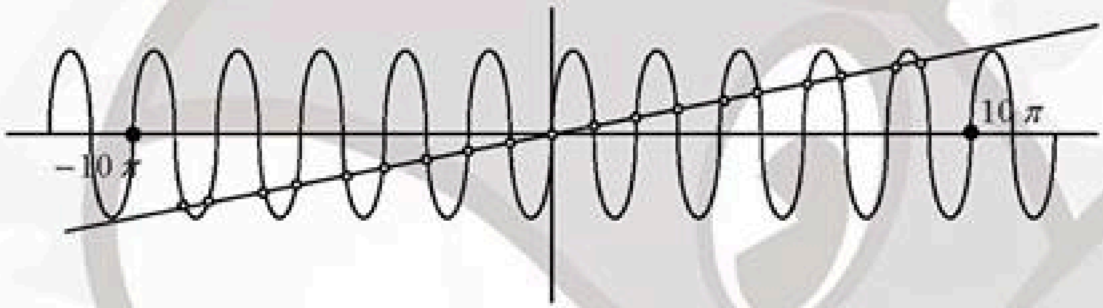


5. 關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\dfrac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

(1)交點的個數是無窮多
(2)交點的個數是奇數且大於 20
(3)交點的個數是奇數且小於 20
(4)交點的個數是偶數且大於或等於 20
(5)交點的個數是偶數且小於 20 【96 學測】

答：(3) **（99 課綱第五冊第二章三角函數）（三角函數圖形）（非學測範圍）**

解：不同類的函數，不能作代數計算處理，只能作圖形觀察。

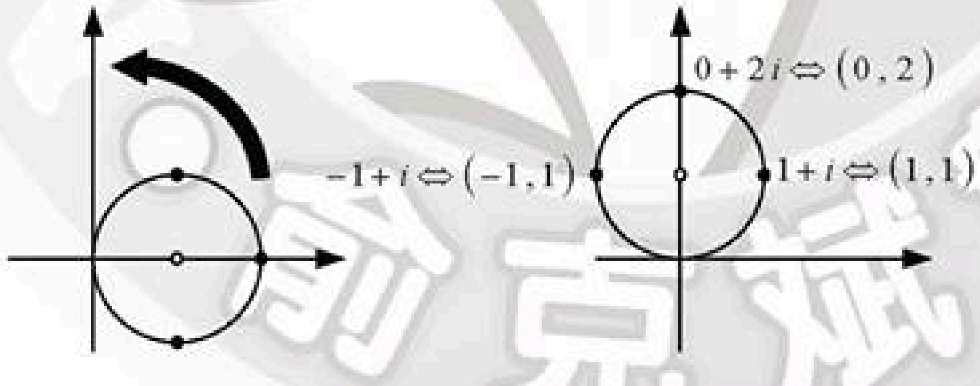



## 貳、多選題

6. 若 $\Gamma=\{z \mid z$ 為複數，且 $|z-1|=1\}$，
則下列哪些點會落在圖形 $\Omega=\{\omega \mid \omega=iz,\ z\in\Gamma\}$ 上？
(1) $2i$　(2) $-2i$　(3) $1+i$　(4) $1-i$　(5) $-1+i$　【96 學測】

答：(1)(3)(5) **（99 課綱第五冊第二章三角函數）（複數極式）（數甲、非學測非社會組範圍）**

解：$|z-1|=1$ 的幾何意義，表『以 $(1,0)$ 為圓心，1 為半徑的圓』
$i\times z$ 的幾何意義，表『將 $z$ 上的點逆時針旋轉 $90^{o}$』
變成『以 $(0,1)$ 為圓心，1 為半徑的圓』




7. 坐標平面上有相異兩點 $P$、$Q$，其中 $P$ 點坐標為 $(s,t)$。
已知線段 $\overline{PQ}$ 的中垂線 $L$ 的方程式為 $3x-4y=0$，
試問下列哪些選項是正確的？

(1)向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3,-4)$ 平行　(2)線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 $\dfrac{|6s-8t|}{5}$

(3) $Q$ 點坐標為 $(t,s)$ (4)過 $Q$ 點與直線 $L$ 平行之直線必過點 $(-s,-t)$

(5)以 $O$ 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0 【96 學測】

答：(1)(2)(4)(5) **（99 課綱第三冊第三章平面向量）**

**（直線參數式、方向向量、法向量、點到線的距離、垂直與內積）**

解：(1) $3x-4y=0$ 的法向量 $\overrightarrow{N}=(3,-4)$

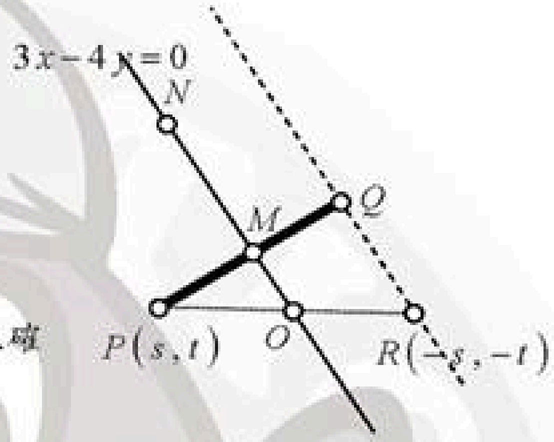
顯然：$\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3,-4)$ 平行

(2) $\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\times\dfrac{|3s-4t|}{5}$

(3) $(t,s)$ 與 $(s,t)$ 的中點 $\left(\dfrac{t+s}{2},\dfrac{t+s}{2}\right)\notin 3x-4y=0$

(4) $(-s,-t)$ 與 $(s,t)$ 的中點 $(0,0)\in 3x-4y=0$，故正確

(5) $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}$，與 $\overrightarrow{PQ}$ 互相垂直，故正確




8. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$？

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ 【96 學測】

答：(1)(5) **（99 課綱第四冊第三章矩陣）（矩陣列運算）**

解：$\begin{pmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+3z=7\\y+z=2\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$

$(x,y,z)=(2,1,1)$ 符合 (1)(2)(3)(5)，但不符合(4)

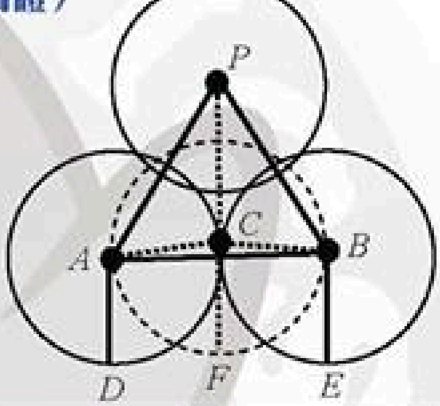
又由(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$ (5) $\begin{vmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$ 知係『恰一組解』

而(2) $\begin{vmatrix}-1&3&-1\\-1&1&1\\3&1&-7\end{vmatrix}=0$ (3) $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=0$ 知係『無限多解』

9. 坐標空間中，在 $xy$ 平面上置有三個半徑爲 1 的球兩兩相切，
設其球心分別爲 $A$、$B$、$C$。
今將第四個半徑爲 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，
並保持穩定。
設第四個球的球心爲 $P$，試問下列哪些選項是正確的？
(1)點 $A$、$B$、$C$ 所在的平面和 $xy$ 平面平行
(2)三角形 $ABC$ 是一個正三角形
(3)三角形 $PAB$ 有一邊長爲 $\sqrt{2}$
(4)點 $P$ 到直線 $AB$ 的距離爲 $\sqrt{3}$
(5)點 $P$ 到 $xy$ 平面的距離爲 $1+\sqrt{3}$ 【96 學測】

答：(1)(2)(4) **（99 課綱第四冊第一章空間向量）（空間概念、正四面體）**

解：$P-ABC$ 係邊長爲 2 之『正四面體』
故(1)(2)(4)正確
(3) 應爲邊長 2
(5) 正四面體的高 $\frac{\sqrt{6}}{3}\times 2$
故點 $P$ 到 $xy$ 平面的距離應爲爲 $1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$




10. 設 $a$ 爲大於 1 的實數，考慮函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$，
試問下列哪些選項是正確的？
(1) 若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$
(2) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{f(38)}{f(19)}$
(3) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$
(4)若 $P$、$Q$ 爲 $y=g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 $PQ$ 之斜率必爲正數
(5)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=\frac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$ 的圖形也有兩個交點 【96 學測】

答：(1)(2)(4)(5) **（99 課綱第一冊第三章指數、對數函數）（指數對數運算律、反函數）**

解：(1) $f(3)=a^3=6 \Leftrightarrow \log_a 6=3$

$g(36)=6 \Rightarrow \log_a 36=2\log_a 6=2\times 3=6$

(2) $\frac{f(238)}{f(219)}=\frac{a^{238}}{a^{219}}=a^{238-219}=a^{19}$

$\frac{f(38)}{f(19)}=\frac{a^{38}}{a^{19}}=a^{38-19}=a^{19}$

(3) $g(238)-g(219)=\log_a 238-\log_a 219=\log_a \dfrac{238}{219}\approx \log_a 1.\cdots$

$g(38)-g(19)=\log_a 38-\log_a 19=\log_a \dfrac{38}{19}=\log_a 2$

(4)(5)看圖說話，顯然正確。

精確來講：(4)是增函數概念；(5)是反函數概念

11. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，
已知 $f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(5)=5$，
則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？
(1) $(-\infty,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,2)$ (4) $(2,5)$ (5) $(5,\infty)$ 【96 學測】

答：(2)(4) **(99 課綱第一冊第二章多項式函數)(插值法、因式定理、勘根定理)**

解：設 $f(x)=1(x-1)(x-2)(x-5)+p(x-1)(x-2)+q(x-1)+r$

$f(1)=1 \Rightarrow f(1)=r=1$

$f(2)=2 \Rightarrow f(2)=q+1=2 \Rightarrow q=1$

$f(5)=5 \Rightarrow f(5)=p(4)(3)+4+1=5 \Rightarrow p=0$

故 $f(x)=1(x-1)(x-2)(x-5)+(x-1)+1$

而 $f(0)=-10$、$f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(3)=-1$、$f(4)=-2$、$f(5)=5$

根據**勘根定理**，故區間 $(0,1)$、$(2,3)$、$(4,5)$ 必定有實根

解：依題意，$f(x)=x$ 的三根為 1、2、5

故 $f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-5)\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-5)+x$

而 $f(0)=-10$、$f(1)=1$、$f(2)=2$、$f(3)=-1$、$f(4)=-2$、$f(5)=5$

根據**勘根定理**，故區間 $(0,1)$、$(2,3)$、$(4,5)$ 必定有實根

## 第二部分：選填題

A. 設實數 $x$ 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$______。(化成最簡分數)
【96 學測】

答：$\dfrac{1}{4}$ **(99 課綱第一冊第三章指數、對數函數)(對數運算律)**

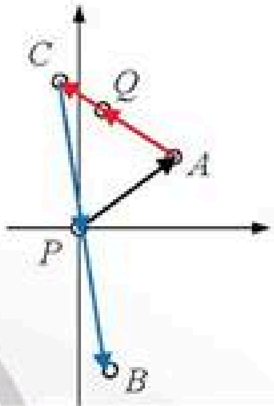
解：令 $A=\log_2 x$，原式 $\Rightarrow \dfrac{2}{A}-A=1\Rightarrow A^2+A-2=0\Rightarrow (A+2)(A-1)=0\Rightarrow A=-2$ 或 1

故 $\log_2 x=-2 \Rightarrow x=2^{-2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$

或 $\log_2 x=1 \Rightarrow x=2$ (不合)

B. 在坐標平面上的 $\Delta ABC$ 中，$P$ 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，$Q$ 在 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$。
已知 $\overrightarrow{PA}=(4,3)$、$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則 $\overrightarrow{BC}=$______。【96 學測】

答：$(-1,12)$ **(99 課綱第三冊第三章平面向量)(係數積)**




解：將各點予以座標化

$P(0,0)$、$A(4,3)$、$Q(1,5)$

利用係數積：$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}\Rightarrow C\left(-\frac{1}{2},6\right)$

$P$ 為 $\overline{BC}$ 邊之中點，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}=(-1,12)$

C. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將15位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。
現在有一位參賽者所獲15位評審的平均成績為76分，
其中有三位評審給的成績92、45、55應剔除，
則這個參賽者的比賽成績為＿＿＿＿＿分。　【96學測】

答：79（99課綱第二冊第四章數據分析）（平均數）

解：比賽成績為 $\frac{76\times15-92-45-55}{15-3}=79$

D. 某巨蛋球場 $E$ 區共有25排座位，此區每一排都比其前一排多2個座位。
小明坐在正中間那一排（即第13排），發現此排共有64個座位，
則此球場 $E$ 區共有＿＿＿＿＿個座位。　【96學測】

答：1600（99課綱第二冊第一章數列與級數）（等差規律、等差中項）

解：所求 $=[(64-24)+\cdots+(64-4)+(64+2)+64+(64+2)+(64+4)+\cdots+(64+24)]$
$=64\times25=1600$

解：利用『等差中項』觀念，所求 $S_{25}=25\times a_{13}=25\times64=1600$

E. 設 $P$、$A$、$B$ 為坐標平面上以原點為圓心的單位圓上三點，
其中 $P$ 點坐標為 $(1,0)$，$A$ 點坐標為 $\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$，且 $\angle APB$ 為直角，
則 $B$ 點坐標為＿＿＿＿＿。（化成最簡分數）　【96學測】

答：$\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

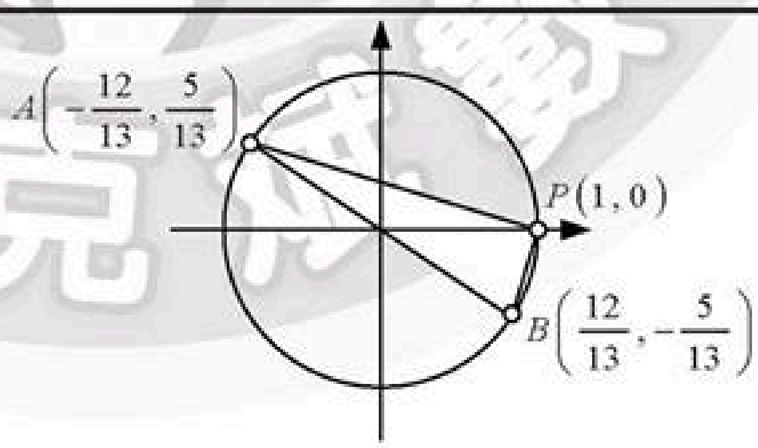
（99課綱第三冊第二章直線與圓）

（直徑的圓周角）

解：因為『直徑的圓周角 $90^\circ$』

$\angle APB$ 為直角，顯然 $\overline{AB}$ 為直徑

故 $B\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$



F. 某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。
其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，
球衣有白、綠、藍三種顏色，
而球鞋有黑、白、灰三種顏色。
公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，
而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，
至於其他顏色間的搭配就沒有限制。
在這些配色的要求之下，最多可有________種不同款式的「阿民」公仔。【96 學測】

答：25（99 課綱第二冊第二章排列組合）（基本計數原理、排容原理）

解：由『**排容原理**』：

　　　　　　白衣
=(全部)−(紅帽，綠衣，灰鞋)　+(紅帽，白衣，灰鞋)
　　　　　　藍衣
　　黑帽　　　　黑鞋
−(灰帽，白衣，白鞋)
　　紅帽　　　　灰鞋

$=4\times3\times3-(1\times3\times1)-(3\times1\times3)+(1\times1\times1)=25$

G. 摸彩箱裝有若干編號爲 1，2，...，10 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。
今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。
現有甲、乙兩案：
甲案爲當摸得彩球的號數爲 $k$ 時，其所獲報酬同爲 $k$；
乙案爲當摸得彩球的號數爲 $k$ 時，其所獲報酬爲 $11-k$ ($k=1$，2，...，10)。
已知依甲案每摸取一球的期望值爲 $\frac{67}{14}$，
則依乙案每摸取一球的期望值爲________。（化成最簡分數）【96 學測】

答：$\frac{87}{14}$（99 課綱第五冊第一章機率統計 II）（期望值）（非學測範圍）

解：

| 事件 | 1 | 2 | ⋯ | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 機率 | $P_1$ | $P_2$ | ⋯ | $P_{10}$ |
| 利益 1 | **1** | **2** | ⋯ | **10** |
| 利益 2 | **11-1** | **11-2** | ⋯ | **11-10** |

$E(甲)=1\times P_1+2\times P_2+\cdots+10\times P_{10}=\frac{67}{14}$

$E(乙)=(11-1)P_1+(11-2)P_2+\cdots+(11-10)P_{10}$

$=11\left(P_1+P_2+\cdots+P_{10}\right)-\left(1\times P_1+2\times P_2+\cdots+10\times P_{10}\right)$

$=11(1)-\left(\frac{67}{14}\right)=\frac{87}{14}$

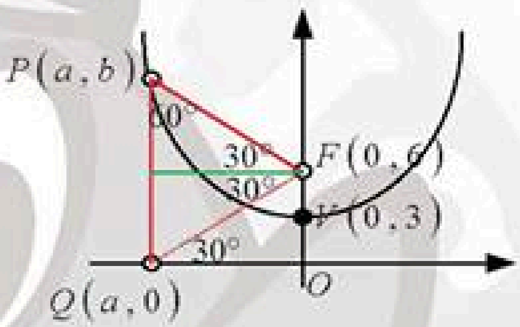
解：$E(甲)=\sum_{k=1}^{10}P_k\cdot k=\frac{67}{14}$，且 $\sum_{k=1}^{10}P_k=1$

則 $E(乙)=\sum_{k=1}^{10}P_k\cdot(11-k)=11\sum_{k=1}^{10}P_k-\sum_{k=1}^{10}P_k\cdot k=11-\frac{67}{14}=\frac{87}{14}$

H. 坐標平面上有一以點 $V(0,3)$ 爲頂點、$F(0,6)$ 爲焦點的拋物線。
設 $P(a,b)$ 爲此拋物線上一點，$Q(a,0)$ 爲 $P$ 在 $x$ 軸上的投影，
滿足 $\angle FPQ=60^\circ$，則 $b=$__________。　　【96學測】

答：12（99課綱第四冊第四章二次曲線）（拋物線）

解：根據拋物線的定義




$\overline{PF}=\overline{PQ}=b\xrightarrow{\angle FPQ=60^\circ}\Delta FPQ$ 爲正 $\Delta$

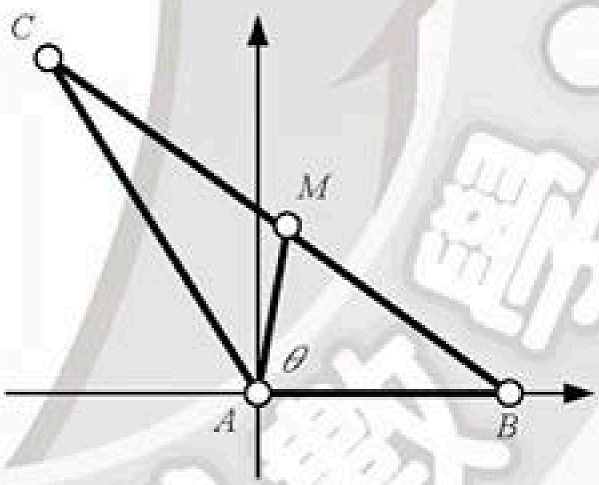
$\angle FQO=30^\circ$ 且 $\overline{FO}=6$

$\Rightarrow\ \overline{FQ}=b=12$

I. 在 $\Delta ABC$ 中，$M$ 爲 $\overline{BC}$ 邊之中點，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle BAC=120^\circ$，
則 $\tan\angle BAM=$__________。（化成最簡根式）　　【96學測】

答：$5\sqrt{3}$（99課綱第三冊第一章三角）（廣義三角定義）

解：將各點予以座標化




$A(0,0)$、$B(3,0)$、

$C\left(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$、$M\left(\frac{1}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$

利用『廣義三角』定義：

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$$