92 年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編授

第一部分：選擇題

壹、單一選擇題

1. 試問有多少個正整數n使得$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$爲整數？

   (1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個

答：(4) （數論：整數、因數）

解：$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}=\frac{55}{n}\in Z \xrightarrow{n\in N} n=1,5,11,55$

2. 若$f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式$g(x)=f(f(x))$除以$(x-2)$所得的餘式爲

   (1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11

答：(5) （多項式：餘式定理）

解：所求$=g(2)=f(f(2))=f(3)=11$

3. 若$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$爲小於0的實數，則$\theta$是第幾象限角？

   (1) 第一象限角　(2) 第二象限角

   (3) 第三象限角　(4) 第四象限角

   (5) 條件不足，無法判斷

答：(2) （三角：廣義三角、象限正負）

解：$\begin{cases} 4\cos\theta-3\sin\theta<0 \\ 4\sin\theta+3\cos\theta=0 \end{cases} \xrightarrow{\tan\theta=-\frac{3}{4},\ 4\cos\theta<3\sin\theta} \theta\in$第二象限角

4. 設ABC爲坐標平面上一三角形，P爲平面上一點且$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，

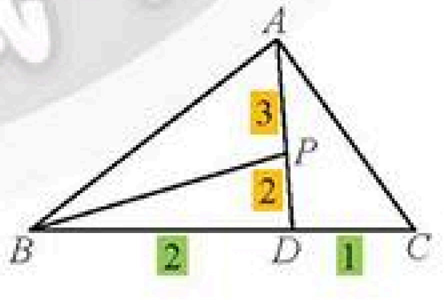
   則$\frac{\Delta ABP\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}$等於

   (1) $\frac{1}{5}$　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{2}{5}$　(4) $\frac{1}{2}$　(5) $\frac{2}{3}$

答：(5) （平面向量：係數積、共線定理、分點公式）

解：$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$$\frac{\Delta ABP\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{\frac{3}{5}\Delta ABD\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\Delta ABC\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{2}{3}$$



5. 根據統計資料，在A小鎮當某件訊息發布後，t小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的$100\left(1-2^{-kt}\right)\%$，其中$k$是某個大於0的常數。今有某訊息，假設在發布後3小時之內

已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要T小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則T最接近下列哪一個選項？

(1) 5 小時　(2) $7\frac{1}{2}$ 小時　(3) 9 小時　(4) $11\frac{1}{2}$ 小時　(5) 13 小時

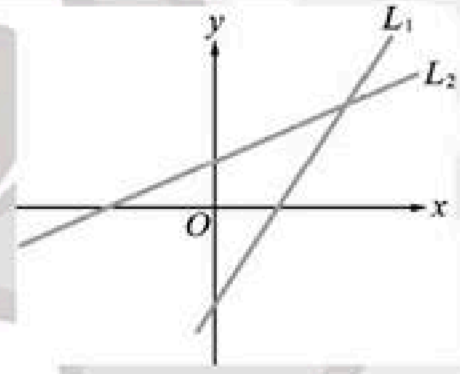
答：(4)　（指數對數：指數運算律、對數運算律）

解：$\begin{cases} 100\left(1-2^{-k\times 3}\right)\% = 70\% \\ 100\left(1-2^{-k\times T}\right)\% = 99\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-k\times 3} = 0.3 \\ 2^{-k\times T} = 0.01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{k\times 3} = \frac{10}{3} \\ 2^{k\times T} = 100 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k\times 3\times \log 2 = \log 10 - \log 3 \\ k\times T\times \log 2 = \log 100 \end{cases} \xrightarrow{\text{相除}} \frac{3}{T} = \frac{1-0.4771}{2} \Rightarrow T = \frac{6}{0.5229} \approx 11.47\cdots$

貳、多重選擇題

6. 如右圖，兩直線L_1、L_2之方程式分別爲
$L_1: x+ay+b=0$，$L_2: x+cy+d=0$；
試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a>0$
(2) $b>0$
(3) $c>0$
(4) $d>0$
(5) $a>c$



答：(4)(5)　（平面上的直線：一般式、斜率、截距）

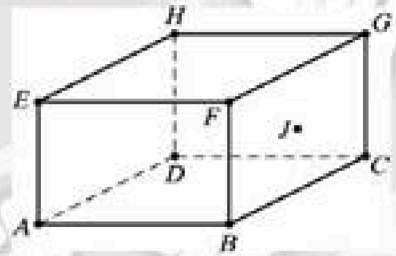
解：斜率：$-\frac{1}{a} > 1 > -\frac{1}{c} > 0 \Rightarrow c < -1 < a < 0$

x截距：$-b > 0 > -d \Rightarrow b < 0 < d$

7. 如右圖，$ABCD-EFGH$爲一平行六面體，J爲四邊形$BCGF$的中心，
如果$\overrightarrow{AJ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{AE}$，
試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\frac{1}{3} < b < \frac{2}{3}$　(2) $a+b+c=2$

(3) $a=1$　(4) $a=2c$　(5) $a=b$



答：(1)(2)(3)(5)　（空間：空間向量）

解：$\overrightarrow{AJ} = 1\times\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\times\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\times\overrightarrow{AE}$

8. 以下各數何者爲正？

(1) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$　(2) $\log_2 3-1$　(3) $\log_3 2-1$　(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$　(5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

答：(1)(2)(5)　（指數對數：對數運算律、換底公式）

解：(1) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{4} > 0$　(2) $\log_2 3-1 = \frac{\log 3}{\log 2}-1 > 0$　(3) $\log_3 2-1 = \frac{\log 2}{\log 3}-1 < 0$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3 < 0$　　(5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 > 0$

9. 下列哪些函數的最小正週期爲 π？
(1) $\sin x+\cos x$　(2) $\sin x-\cos x$　(3) $|\sin x+\cos x|$
(4) $|\sin x-\cos x|$　(5) $|\sin x|+|\cos x|$

答：(3)(4)　（三角函數：圖形、絕對值、週期）（非學測範圍）

解：(1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，週期爲 2π

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，週期爲 2π

(3) $|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$，週期爲 π

(4) $|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，週期爲 π

(5) $|\sin x|+|\cos x|$，週期爲 $\frac{\pi}{2}$

10. 假設坐標平面上一非空集合 S 內的點 (x,y) 具有以下性質：「若 $x>0$，則 $y>0$」。試問下列哪些敘述對 S 內的點 (x,y) 必定成立？
(1) 若 $x\le 0$，則 $y\le 0$；　(2) 若 $y\le 0$，則 $x\le 0$；
(3) 若 $y>0$，則 $x>0$；　(4) 若 $x>1$，則 $y>0$；
(5) 若 $y<0$，則 $x\le 0$。

答：(2)(4)(5)　（邏輯：命題、同義、充分條件必要條件）

解：「若 $x>0$，則 $y>0$」≡「若 $y\le 0$，則 $x\le 0$」，故(2)正確
「若 $x>1 \Rightarrow x>0$，則 $y>0$」，故(4)正確
「若 $y<0 \Rightarrow y\le 0$，則 $x\le 0$」，故(5)正確
(1)(3)無法作此推論

11. 設 $\pi_a: x-4y+az=10$（a 爲常數）、$E_1: x-2y+z=5$ 及 $E_2: 2x-5y+4z=-3$ 爲坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的？
(1)存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 平行；
(2)存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 垂直；
(3)存在實數 a 使得 π_a、E_1、E_2 交於一點；
(4)存在實數 a 使得 π_a、E_1、E_2 交於一直線；
(5)存在實數 a 使得 π_a、E_1、E_2 沒有共同交點。

答：(2)(3)(5)　（空間中的平面：法向量、克拉瑪法則）

解：① $\overrightarrow{\pi_a}=(1,-4,a)$、$\overrightarrow{E_1}=(1,-2,1)$、$\overrightarrow{E_2}=(2,-5,4)$
$\overrightarrow{\pi_a} \nparallel \overrightarrow{E_1} \Rightarrow$ 故(1)錯，$\overrightarrow{\pi_a}\cdot\overrightarrow{E_1}=0 \Rightarrow a=-9 \Rightarrow$ 故(2)正確

② $\begin{cases} \pi_a: x-4y+az=10 \\ E_1: x-2y+z=5 \\ E_2: 2x-5y+4z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+(a-1)z=5 \\ y-2z=13 \end{cases}$

當$a=5$時$\Rightarrow$無解，故(5)正確

當$a\neq 5$時$\Rightarrow$恰有一解，故(3)正確

② $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -4 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=-a+5$

當$a=5$時$\Rightarrow \begin{cases} \pi_a: x-4y+5z=10 \\ E_1: x-2y+z=5 \\ E_2: 2x-5y+4z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y+4z=5 \\ y-2z=13 \end{cases}$，無解，故(5)正確

當$a\neq 5$時$\Rightarrow$恰有一解，故(3)正確

第二部分：填充題

A. 設$a_1,a_2,\cdots,a_{50}$是從$-1,0,1$這三個整數中取值的數列。若$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9$

且$(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2=107$，

則$a_1,a_2,\cdots,a_{50}$當中有幾項是0？

答：11（方程組）

解：$a_1,a_2,\cdots,a_{50}$中有x項-1、有y項0、有z項1，故$\begin{cases} x+y+z=50 \\ -x+0y+z=9 \\ 0x+y+4z=107 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=11 \\ z=24 \end{cases}$

B. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個3、一個8、一個9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？(化成最簡分數)

答：$\dfrac{1}{12}$（機率：古典機率）

解：$\dfrac{\overset{1}{\overbrace{\text{僅有一種正確可能}}}}{\underbrace{\dfrac{4!}{2!1!1!}}_{3、3、8、9\text{作直線排列}}}=\dfrac{1}{12}$

C. 設$A(1,0)$與$B(b,0)$爲坐標平面上的兩點，其中$b>1$。

若拋物線$\Gamma: y^2=4x$上有一點P使得ΔABP爲一正三角形，則$b=$_______

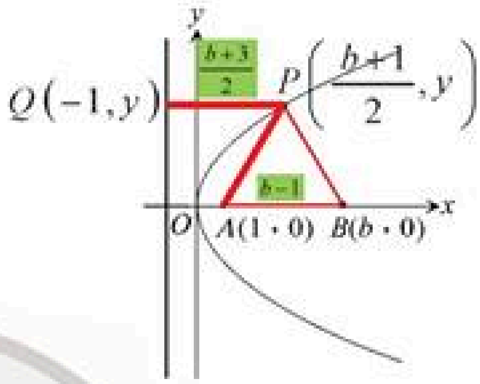
答：5（圓錐曲線：拋物線）

解：$\Gamma: y^2=4x$向右開口，焦點$A(1,0)$、準線$x=-1$，

又 $B(b,0)$，故 $P\left(\frac{b+1}{2},y\right)$

由拋物線定義：$d(P,F)=d(P,L)$

$\xrightarrow{\Delta ABP\text{ 為正三角形}}\underbrace{b-1}_{\overline{AB}}=\underbrace{\frac{b+1}{2}-(-1)}_{\overline{PQ}}\Rightarrow b=5$

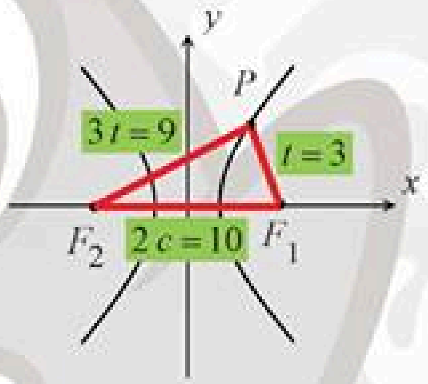


D. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上的一點且位在第一象限。

若 F_1、F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，

則 ΔF_1PF_2 的周長等於________。

答：22 **（圓錐曲線：雙曲線）**



解：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 左右開口，$a=3$、$b=4$、$c=5$

$\xrightarrow{\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3}\overline{PF_1}=t$、$\overline{PF_2}=3t$

$\xrightarrow{\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a}2t=6\xrightarrow{t=3}\begin{cases}\overline{PF_1}=3\\\overline{PF_2}=9\end{cases}$

$\overline{F_1F_2}=2c=10\Rightarrow\Delta PF_1F_2=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=3+9+10=22$

E. 在坐標空間中，通過 $O(0,0,0),N(0,0,1),P\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{11}}{4},-\frac{1}{2}\right)$ 三點的平面與球面

$S:x^2+y^2+z^2=1$ 相交於一個圓 C，則圓 C 的劣弧 $\overset{\frown}{NP}$ 的弧長等於________π。

(所謂劣弧 NP 是指圓 C 上由 N,P 兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧。)

答：$\frac{2\pi}{3}$ **（空間：空間向量、向量求夾角）**

解：$\cos\angle NOP=\dfrac{(0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{11}}{4},-\frac{1}{2}\right)}{1\times1}=-\frac{1}{2}$

故 $\angle NOP=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$ 劣弧 $\overset{\frown}{NP}$ 的弧長 $=1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

F. 設 k 為一整數。若方程式 $kx^2+7x+1=0$ 有兩個相異實根，

且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k=$________。

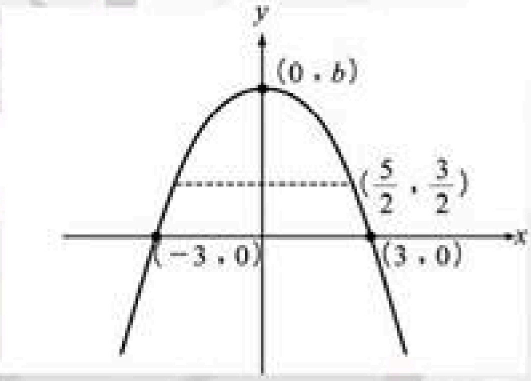
答：12 **（方程式：根與係數關係、判別式）**

解：$\begin{cases} 判別式：7^2-4\times k\times 1>0 \\ 兩根之積：\dfrac{5}{71}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{6}{71} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<\dfrac{49}{4}=12.25 \\ \dfrac{71}{6}\approx 11.8\cdots<k<\dfrac{71}{5}=14.2 \end{cases} \xrightarrow{k\in Z} k=12$

G. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線爲對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬爲 6 公尺，且距底部 $\dfrac{3}{2}$ 公尺高處其寬爲 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度爲________公尺。(化成最簡分數)

答：$\dfrac{54}{11}$ **（圓錐曲線：拋物線）**

解：將資訊座標化，令拋物線 $x^2=4c(y-b)$



$\begin{cases} 過(3,0)\Rightarrow 9=4c(-b) \\ 過\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)\Rightarrow \dfrac{25}{4}=4c\left(\dfrac{3}{2}-b\right) \end{cases}$

$\xrightarrow{相除} \dfrac{9}{\frac{25}{4}}=\dfrac{-b}{\frac{3}{2}-b} \Rightarrow b=\dfrac{54}{11}$

H. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值爲________分。(計算到整數爲止，小數點以後四捨五入。)

答：68 **（機率與統計 II：期望值）（非學測範圍）**

解：

事件	確定對		事件	部份確定		事件	亂猜	
機率	1	0	機率	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	機率	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{4}{5}$
利益	**4**	**-1**	利益	**4**	**-1**	利益	**4**	**-1**

$E(X)=(1\times 4)\times 16+\left(\dfrac{1}{3}\times 4+\dfrac{2}{3}\times(-1)\right)\times 6+\left(\dfrac{1}{5}\times 4+\dfrac{4}{5}(-1)\right)\times 3=64+4+0=68$ 分

I. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。
一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度爲 x 時，華氏溫度爲 $y=\dfrac{9}{5}x+32$；若用華氏溫度表示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏________度，標準差是華氏________度。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

答：60.8；6.3 **（統計：平均數、標準差）**

解：平均 $\overline{Y}=\dfrac{9}{5}\overline{X}+32=\dfrac{9}{5}\times 16+32=60.8$、標準差 $S_y=\left|\dfrac{9}{5}\right|S_x=\dfrac{9}{5}\times 3.5=6.3$