97年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編授

第壹部分：選擇題（占60分）

一、單選題（占25分）

1. 對任意實數x而言，$27^{\left(x^2+\frac{2}{3}\right)}$的最小值爲

(1) 3　(2) $3\sqrt{3}$　(3) 9　(4) 27　(5) $81\sqrt{3}$　【97學測】

答：(3)　**（99課綱第一冊第三章指數、對數函數）（指數函數、指數不等式）**

解：因爲$x^2+\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}$，且底數$27>1$，係「遞增函數」

所以$27^{\left(x^2+\frac{2}{3}\right)}\geq 27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$

2. 在職棒比賽中ERA值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：

若此投手共主投n局，其總責任失分爲E，則其ERA值爲$\frac{E}{n}\times 9$。

有一位投手在之前的比賽中共主投了90局，且這90局中他的ERA值爲3.2。

在最新的一場比賽中此投手主投6局無責任失分，

則打完這一場比賽後，此投手的ERA值成爲

(1) 2.9　(2) 3.0　(3) 3.1　(4) 3.2　(5) 3.3　【97學測】

答：(2)　**（99課綱第二冊第四章數據分析）（平均數）**

解：因爲$3.2=\frac{E}{90}\times 9\Rightarrow$總責任失分爲$E=32$。故新的ERA爲$\frac{32}{90+6}\times 9=3$

3. 有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別爲30、50 公尺。

今甲在內圈以等速行走，乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。

若甲走了45公尺，則同時段乙跑了

(1) 90公尺　(2) 120公尺　(3) 135公尺　(4) 150公尺　(5) 180公尺　【97學測】

答：(4)

解：甲、乙速度比$=\frac{2\pi\times 30}{t}:\frac{2\times 2\pi\times 50}{t}=3:10$

當甲走了45公尺，則同時段乙跑了$\frac{45}{3}\times 10=150$

4. 某地區的車牌號碼共六碼，

其中前兩碼爲O以外的英文大寫字母，後四碼爲0到9的阿拉伯數字，

但規定不能連續出現三個4。

例如：AA1234，AB443爲可出現的車牌號碼；

而AO1234，AB3444爲不可出現的車牌號碼。

則所有第一碼爲A且最後一碼爲4的車牌號碼個數爲

(1) 25×9^3　(2) $25\times 9^2\times 10$　(3) 25×900　(4) 25×990　(5) 25×999　【97學測】

答：(4)　**（99課綱第二冊第二章排列組合）（基本計數原理）**

解：

A	O以外的英文字	數字	數字	數字	4	$\Rightarrow 25\times10^3$

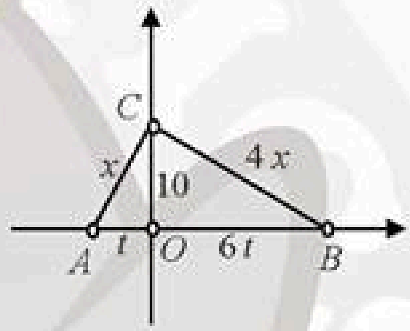
A	O以外的英文字	數字	4	4	4	$\Rightarrow 25\times10$

所求$=25\times10^3-25\times10=25\times(1000-10)=25\times990$

5. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。
利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；
小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，
發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍。
試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？
(1) 60 公尺　(2) 65 公尺　(3) 70 公尺　(4) 75 公尺　(5) 80 公尺　【97 學測】

答：(1)　（99 課綱第三冊第一章三角）（畢氏定理、三角測量）

解：設$\overline{OA}=t$、$\overline{OA}=6t$、$\overline{AC}=k$、$\overline{BC}=6k$



依題意：$\begin{cases} x^2=t^2+10^2 \cdots\cdots\cdots(1) \\ (4x)^2=(6t)^2+10^2 \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times16-(2)$：$0=-20t^2+1500 \Rightarrow t=5\sqrt{3}$

故紅白兩旗之間的距離為$7t=35\sqrt{3}\approx60.62$

二、多選題（占 35 分）

6. 試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？
(1) $y=x+100$　(2) $y=x^2+1$　(3) $y=2+\sin x$
(4) $y=2^x$　(5) $y=\log x$　【97 學測】

答：(2)(3)(4)　（99 課綱綜合）（一次函數、二次函數、三角函數、指數函數、對數函數）

解：函數圖形完全落在 x 軸的上方，表函數值恆為正數，故選(2)(3)(4)

7. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。
若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？
(1) 每班至少會有一人被抽中
(2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多
(3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率
(4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，
則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣
(5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於$\frac{1}{100}$　【97 學測】

答：(4)(5)　（99 課綱第二冊第三章機率）（古典機率）

解：(1) 錯誤：違反隨機概念，有可能只抽到兩班共 80 人
(2) 錯誤：違反隨機概念，男生人數不一定比女生人數多
(3) 錯誤：小文與小美被抽中的機率相等

(4) 正確：機率均為$\dfrac{C_2^2C_{78}^{798}}{C_{80}^{800}}$

(5) 正確：機率為$\dfrac{C_2^2C_{78}^{798}}{C_{80}^{800}}=\dfrac{\dfrac{798!}{78!\times720!}}{\dfrac{800!}{80!\times720!}}=\dfrac{80\times79}{800\times799}<\dfrac{1}{100}$

8. 已知a_1，a_2，a_3為一等差數列，而b_1，b_2，b_3為一等比數列，
且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a_1<a_2$與$a_2>a_3$可能同時成立
(2) $b_1<b_2$與$b_2>b_3$可能同時成立
(3) 若$a_1+a_2<0$，則$a_2+a_3<0$
(4) 若$b_1b_2<0$，則$b_2b_3<0$
(5) 若b_1，b_2，b_3皆為正整數且$b_1<b_2$，則b_1整除b_2 【97學測】

答：(2)(4) **（99課綱第二冊第一章數列與級數）（等差等比）**

解：(1) 錯誤：公差$d\ge0\Rightarrow a_1\le a_2\le a_3$，公差$d\le0\Rightarrow a_1\ge a_2\ge a_3$
(2) 正確：當首項與公比皆為負時即可成立
(3) 錯誤：反例：$a_1=-1$、$a_2=0$、$a_3=1$，則$a_1+a_2<0$且$a_2+a_3>0$
(4) 正確：若$b_1b_2<0$，則公比$r=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{b_3}{b_2}<0$，故$b_2b_3<0$
(5) 錯誤：反例：$b_1=4$、$b_2=6$、$b_3=9$，則$b_1<b_2$，但b_1不整除b_2

9. 已知在一容器中有A，B兩種菌，
且在任何時刻A，B兩種菌的個數乘積為定值10^{10}。
為了簡單起見，科學家用$P_A=\log(n_A)$來記錄A菌個數的資料，
其中n_A為A菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $1\le P_A\le10$
(2) 當$P_A=5$時，B菌的個數與A菌的個數相同
(3) 如果上週一測得P_A值為4而上週五測得P_A值為8，
表示上週五A菌的個數是上週一A菌個數的2倍
(4) 今天的P_A值比昨天增加1，則今天的A菌比昨天多了10個
(5) 假設科學家將B菌的個數控制為5萬個，則此時$5<P_A<5.5$ 【97學測】

答：(2)(5) **（99課綱第一冊第三章指數、對數函數）（指數、對數運算律）**

解：$n_A\times n_B=10^{10}\Rightarrow\log(n_A)+\log(n_B)=\log10^{10}\Rightarrow P_A+P_B=10$
(1)錯誤：因為$1\le n_A\le10^{10}\Rightarrow0\le P_A\le10$
(2)正確：當$P_A=\log(n_A)=5$時，$P_B=\log(n_B)=5$，故$n_A=10^5$，$n_B=10^5$

(3)錯誤：$P_A=4\Rightarrow n_A=10^4$；$P_{A'}=8\Rightarrow n_{A'}=10^8$，故$\dfrac{n'_A}{n_A}=\dfrac{10^8}{10^4}=10^4$

(4)錯誤：若昨天$P_A=x\Rightarrow n_A=10^x$，則今天$P_{A'}=x+1\Rightarrow n_A=10^{x+1}$

故增加的數量爲$10^{x+1}-10^x=9\cdot10^x$

(5)正確：因爲$n_B=50000=5\times10^4$，則$n_A=2\times10^5$

故$P_A=\log2\times10^5=5+\log2=5.301$

10. 已知實係數多項式$f(x)$與$g(x)=x^3+x^2-2$有次數大於 0 的公因式。
試問下列哪些選項是正確的？
(1) $g(x)=0$恰有一實根
(2) $f(x)=0$必有實根
(3) 若$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同實根，則此實根必爲 1
(4) 若$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲一次式
(5) 若$f(x)=0$與$g(x)=0$沒有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲二次式
【97 學測】

答：(1)(3)(5) **（99 課綱第一冊第二章多項式函數）（多項式因式分解）**

解：$g(x)=x^3+x^2-2=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$

(1)正確：$g(x)=0$的實根爲 1

(2)錯誤：若$f(x)$與$g(x)$的公因式爲x^2+2x+2

則$f(x)$可能恰爲x^2+2x+2，故$f(x)$可能沒有實根

(3)正確：$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的公因式爲$x-1$

故此實根必爲 1

(4)錯誤：若$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式

可能爲$(x-1)$或$(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$，不能確定

(5)正確：若$f(x)=0$與$g(x)=0$沒有共同實根，但$f(x)$與$g(x)$確實有次數大於 0 的

公因式，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式應爲x^2+2x+2

11. 設坐標空間中三條直線L_1，L_2，L_3的方程式分別爲

L_1：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{z+4}{8}$；$L_2$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+4}{4}$；$L_3$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$。

試問下列哪些選項是正確的？
(1) L_1與L_2相交　　(2) L_2與L_3平行
(3) 點$P(0,-3,-4)$與$Q(0,0,0)$的距離即爲點P到L_3的最短距離
(4) 直線L：$\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+4}{-3}\end{cases}$與直線$L_1$，$L_2$皆垂直
(5) 三直線L_1，L_2，L_3共平面　【97 學測】

答：(1)(2)(4)(5) **（99 課綱第二章空間中的直線與平面）（空間中直線的關係）**

解：(1)正確：L_1與L_2皆過點$(0,-3,-4)$且方向向量皆不同，故兩直線相交

(2)正確：L_2與L_3的方向向量相同，但L_3的點$(0,0,0)$不在L_2上，故兩直線平行

(3)錯誤：因爲$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{L_2}=(0,-3,-4)\cdot(1,3,4)\neq 0$

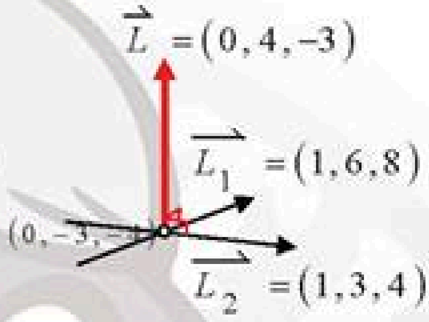
故$\overrightarrow{QP}$不垂直$\overrightarrow{L_2}$，所以$\overline{PQ}$不爲點P到L_3的最短距離

(4)正確：直線L的方向向量爲$\overrightarrow{L}=(0,4,-3)$，

$\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{L_1}=0$、$\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{L_2}=0$，

且L_1，L_2，L均通過點$(0,-3,-4)$，

故$L\perp L_1$，$L\perp L_2$

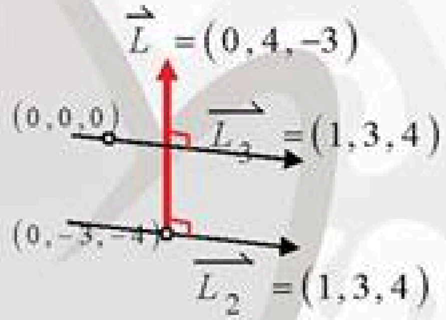


(5)正確：$L_1:\begin{cases}x=t\\y=6t-3\\z=8t-4\end{cases}$、$L_3:\begin{cases}x=s\\y=3s\\z=4s\end{cases}$，

而$\begin{cases}s=t\\3s=6t-3\Rightarrow t=s=1\\4s=8t-4\end{cases}$，所以$L_1$與$L_3$相交，

且由(1)知L_1與L_2相交，而由(2)知$L_2 /\!/ L_3$

所以三直線L_1，L_2，L_3共平面



12. 設Γ：$x^2+y^2-10x+9=0$爲坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ的圓心坐標爲$(5,0)$

(2) Γ上的點與直線L：$3x+4y-15=0$的最遠距離等於 4

(3) 直線L_1：$3x+4y+15=0$與Γ相切

(4) Γ上恰有兩個點與直線L_2：$3x+4y=0$的距離等於 2

(5) Γ上恰有四個點與直線L_3：$3x+4y-5=0$的距離等於 2 【97 學測】

答：(1)(2)(4) **（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（圓與直線的關係）**

解：(1)正確：Γ：$(x-5)^2+y^2=4^2$，圓心爲$(5,0)$，半徑爲 4

(2)正確：因爲L：$3x+4y-15=0$恰過圓心$(5,0)$

故Γ上的點到$3x+4y-15=0$的最遠距離等於 4

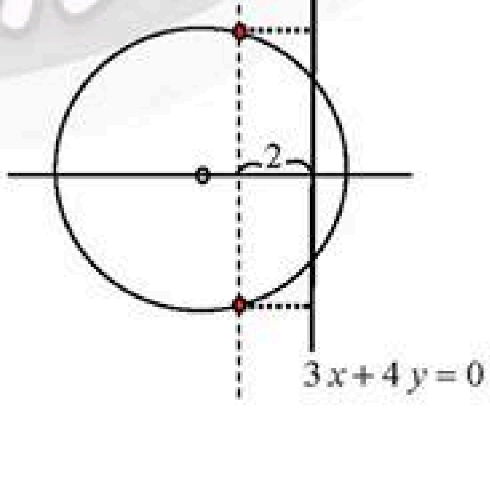
(3)錯誤：因爲$d(O,L_1)=\dfrac{|15+0+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=6>4$

故L_1與Γ不相切

(4)正確：因爲$d(O,L_2)=\dfrac{|15+0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

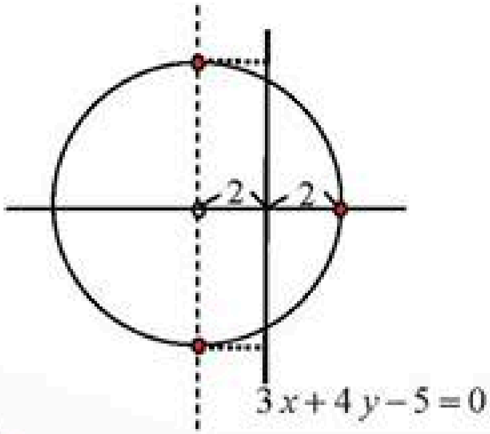
故如右圖，Γ上恰有兩個點兩個點

與直線L_2：$3x+4y=0$的距離等於 2



(5)錯誤：因為 $d\left(O, L_3\right)=\dfrac{|15+0-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

故如右圖，Γ 上恰有三個點兩個點與直線 L_3：$3x+4y-5=0$ 的距離等於 2



第貳部分：選填題（占 40 分）

A. 令 $A(-1,6,0)$、$B(3,-1,-2)$、$C(4,4,5)$ 為坐標空間中三點。
若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$，
則點 D 的坐標為__________。　【97 學測】

答：$(-7,30,18)$ **（99 課綱第四冊第一章空間向量）（空間座標、空間向量）**

解：設 D 的坐標為 (x,y,z)

$\Rightarrow 3(-1-x,6-y,-z)-4(3-x,-1-y,-2-z)+2(4-x,4-y,5-z)=(0,0,0)$

$\Rightarrow -7-x=0$ 且 $30-y=0$ 且 $18-z=0$。故 D 的坐標為 $(-7,30,18)$

解：原式整理：$3\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)-4\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\right)+2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$

$=(-3,18,0)-(12,-4,-8)+(8,8,10)=(-7,30,18)$

故 D 的坐標為 $(-7,30,18)$

B. 在坐標平面上，設 A 為直線 $3x-y=0$ 上一點，B 為 x 軸上一點。
若線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{7}{2},6\right)$，
則點 A 的坐標為__________，點 B 的坐標為__________。　【97 學測】

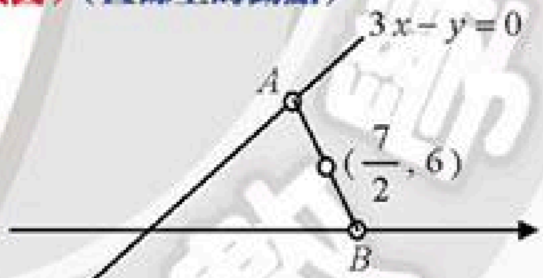
答：$A(4,12)$、$B(3,0)$ **（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（直線上的動點）**

解：設 $B(t,0)$，而 $\overline{AB}$ 之中點為 $\left(\dfrac{7}{2},6\right)$

所以 A 點座標為 $(7-t,12)\in 3x-y=0$

$\Rightarrow 21-3t-12=0\Rightarrow t=3$

故 $A(4,12)$，$B(3,0)$



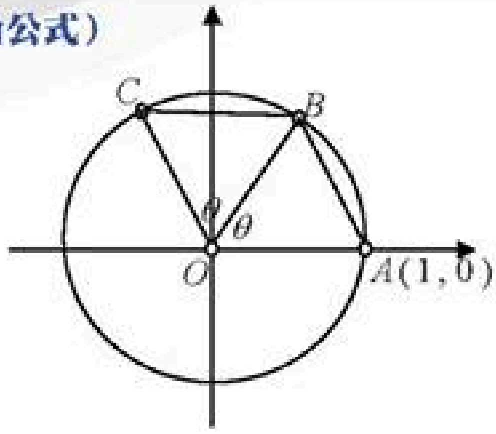
C. 坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。
已知銳角三角形 OAB 的面積為 $\dfrac{3}{10}$，則 ΔOAC 的面積為__________。(化為最簡分數)
【97 學測】

答：$\dfrac{12}{25}$ **（99 課綱第三冊第一章三角）（面積公式、二倍角公式）**

解：因為 $\Delta OAB=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\dfrac{3}{10}$

所以 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$、$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

因為 $\overline{AB}=\overline{BC}$，所以 $\angle COB=\angle BOA=\theta$



故 $\Delta OAC=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin2\theta=\frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right)=\frac{12}{25}$

D. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，
且 $P(-4,1)$ 為 Γ 上一點。
$\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 D，則 D 的 x 坐標為________。 【97 學測】

答：-2（光學性質）（非學測範圍）

解：由光學性質知：P 點所做的切線恰為 $\angle F_1PF_2$ 之角平分線

因為 P 點為切點，故由『一半一半公式』知：切線為 $\frac{-4x}{8}-y=1 \Rightarrow x+2y=-2$

則與 x 軸交於點 $D(-2,0)$

E. 設 $O(0,0,0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，
且知 $(2,2,1)$、$(2,-1,-2)$、$(3,-6,6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。
若平面 E：$x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，
其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則 $(b,c,d)=$________。 【97 學測】

答：$(-2,2,9)$（99 課綱第二章空間中的直線與平面）（平面法向量、平面方程式）

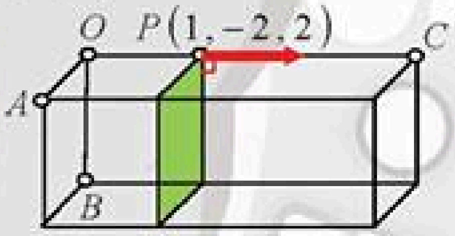
解：先觀察 $A(2,2,1)$、$B(2,-1,-2)$、$C(3,-6,6)$ 與 $O(0,0,0)$ 的距離

$\overline{OA}=\overline{OB}=3$、$\overline{OC}=9$

因為平面截出包含頂點 O 的那一部分是個正立方體

故平面 E 平行平面 OAB 且 $\overline{OP}=3$，$\overline{CP}=6$

且由分點公式知：$P(1,-2,2)$



平面 E 的法向量 $/\!/ \overrightarrow{OC}=(3,-6,6)=3(1,-2,2)$

故平面 E：$(x-1)-2(y+2)+2(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+2z=9$

所以 $(b,c,d)=(-2,2,9)$

F. 設 a，b 為正整數。若 $b^2=9a$，且 $a+2b>280$，
則 a 的最小可能值為________。 【97 學測】

答：225（整數論）（非學測範圍）

解：因為 a，b 為正整數，且 $b^2=9a$ 為完全平方，故 $a=k^2$，$b=3k$

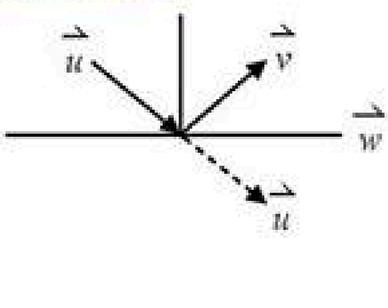
則 $a+2b=k^2+6k=k(k+6)>280 \Rightarrow k$ 取 15，故 a 的最小可能值為 $15^2=225$

G. 坐標平面上有一質點沿方向 $\overrightarrow{u}=(1,2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L，
使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，
之後沿方向 $\overrightarrow{v}=(-2,1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應為 $\overrightarrow{w}=$________。 【97 學測】

答：$\pm(-1,3)$（99 課綱第三冊第三章平面向量）（向量合成、角平分向量）

解：由圖可知：$\overrightarrow{w}$ 為 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的角平分線，又 $\left|\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{u}\right|$

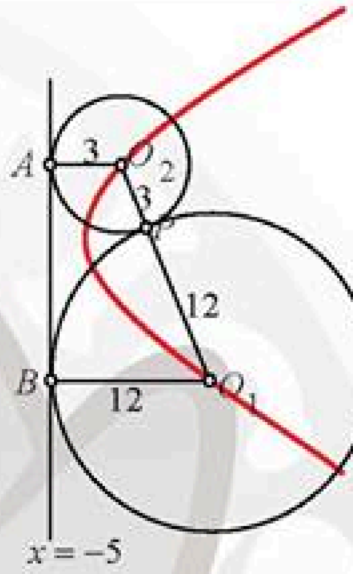
故 $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}=(1,2)+(-2,1)=(-1,3)$



則直線 L 的方向向量應爲 $\overrightarrow{w}=\pm(-1,3)$

H. 已知坐標平面上圓 $O_1:(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 $O_2:(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 $L:x=-5$ 相切。若 Γ 爲以 L 爲準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標爲________。(化爲最簡分數)　【97學測】

答：$\left(-\frac{1}{5},\frac{53}{5}\right)$ **(99課綱第四冊第四章二次曲線)(拋物線)**



解：因爲 $\overline{AO_2}=\overline{O_2P}$、$\overline{BO_1}=\overline{O_1P}$

由拋物線的定義知：P 爲拋物線的『焦點』

由分點公式或係數積知：$P\left(-\frac{1}{5},\frac{53}{5}\right)$