92 年大學入學學科能力測驗試題(補考)

俞克斌老師　編授

第一部分：選擇題

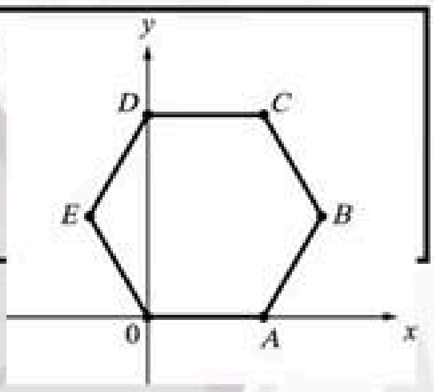
壹、單一選擇題

1. 若六位數 $92a92b$ 可被 9 整除，則 $a+b$ 之值可能爲
(1) 1　(2) 3　(3) 5　(4) 7　(5) 9

答：(3)　（數論：整數、倍數）

解：$9\,|\,9+2+a+9+2+b \Rightarrow 9\,|\,4+a+b \xrightarrow{0\le a+b\le 18} a+b=5$ 或 14

2. 如右圖，$OABCDE$ 爲坐標平面上一正六邊形，其中 O 爲原點，A 點坐標爲 $(2,0)$，則向量 $\overrightarrow{DE}$ 之坐標表示法爲
(1) $(1,\sqrt{3})$　(2) $(-1,-\sqrt{3})$　(3) $(\sqrt{3},1)$
(4) $(-\sqrt{3},-1)$　(5) $(-1,\sqrt{3})$



答：(2)　（平面向量：向量座標表示法）

解：$D(0,2\sqrt{3})$、$E(-1,\sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{DE}=(-1,-\sqrt{3})$

3. 下列選項當中何者的值最大？
(1) $\sin 20^\circ\cos 20^\circ$　(2) $\sin 35^\circ\cos 35^\circ$　(3) $\sin 50^\circ\cos 50^\circ$
(4) $\sin 65^\circ\cos 65^\circ$　(5) $\sin 80^\circ\cos 80^\circ$

答：(3)　（三角：二倍角、廣義三角、角度變換）

解：(1) $\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\frac{1}{2}\sin 40^\circ$　(2) $\sin 35^\circ\cos 35^\circ=\frac{1}{2}\sin 70^\circ$

(3) $\sin 50^\circ\cos 50^\circ=\frac{1}{2}\sin 100^\circ=\frac{1}{2}\sin 80^\circ$　(4) $\sin 65^\circ\cos 65^\circ=\frac{1}{2}\sin 130^\circ=\frac{1}{2}\sin 50^\circ$

(5) $\sin 80^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}\sin 160^\circ=\frac{1}{2}\sin 20^\circ$。

故 $(3)>(2)>(4)>(1)>(5)$

4. 試問有多少個正整數 n 滿足 $100\le(1.5)^n\le 500$？
(1) 3 個　(2) 4 個　(3) 5 個　(4) 6 個　(5) 7 個

答：(2)　（指數對數：對數運算律、對數不等式）

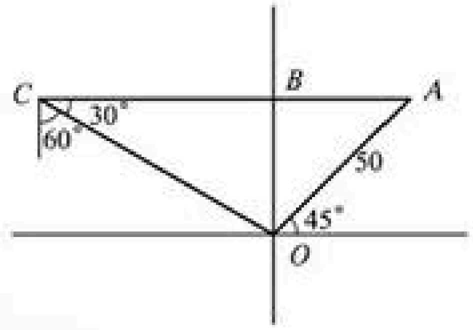
解：$\log 100\le\log(1.5)^n\le\log 500 \Rightarrow \log 100\le n(\log 3-\log 2)\le\log 500$

$$\Rightarrow \frac{2}{0.4771-0.3010}\le n\le\frac{2+0.6990}{0.4771-0.3010}\Rightarrow 11.3\cdots\le n\le 15.3\cdots \xrightarrow{n\in N} n=12,13,14,15$$

5. 某君在一廣場上從某一點出發，先往東北方前進 50 公尺後轉往正西方向行進，一段時間後測得原出發點在他的南偏東 60° 方向；則此時他距原出發點大約
(1) 35 公尺　(2) 43 公尺　(3) 50 公尺　(4) 71 公尺　(5) 87 公尺

答：(4)　（三角：三角測量）

解：$\overline{AB}=\overline{BO}=25\sqrt{2}\Rightarrow\overline{OC}=50\sqrt{2}\approx 50\times 1.414\approx 70.7$



6. 設坐標空間的原點為O，點P的坐標為$(3,4,7)$。若Q點在xy平面上移動，問Q點為下列選項中哪一點時，$\angle POQ$最小？
(1)$(3,3,0)$ (2)$(3,4,0)$ (3)$(4,3,0)$ (4)$(5,12,0)$ (5)$(12,5,0)$

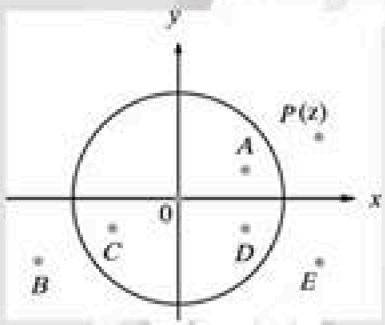
答：(2) **（空間：空間向量、向量求夾角、柯西不等式）**

解：由柯西不等式：$\left(x^2+y^2\right)\left(3^2+4^2\right)\ge(3x+4y)^2\Rightarrow\dfrac{(3x+4y)^2}{x^2+y^2}\le 25$

令$Q(x,y,0)$，則$\cos\angle POQ=\dfrac{(3,4,7)\cdot(x,y,0)}{\sqrt{74}\times\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{74}}\times\dfrac{3x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{74}}\times 5$

$\cos\angle POQ$最大值為$\dfrac{5}{\sqrt{74}}$，此時$\angle POQ$有最小值，而等號成立於：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}$

7. 如右圖，複數z在平面上對應的點P在單位圓O的外部，問複數$\dfrac{1}{z}$對應的點大概是哪一點？
(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E



答：(4) **（複數極式：複數幾何）** **（非學測範圍）**

解：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$，其中$0<\dfrac{1}{r}<1$，$-\dfrac{\pi}{4}<-\theta<0$。故選$D$

貳、多重選擇題

8. 空間中兩相異球面的交集可能是
(1)空集合 (2)一點 (3)兩點 (4)一圓 (5)兩圓

答：(1)(2)(4) **（空間：幾何圖形）**

解：兩球外離：交集為空集合，兩球外切：交集為一點，兩球相交：交集為一圓

9. 已知坐標平面上一拋物線C之對稱軸與坐標軸平行，且C通過$(-1,6)$與$(3,6)$兩點，試問下列哪些敘述是正確的？
(1)C與x軸必相交 (2)C與y軸必相交；
(3)如果C通過$(2,5)$，則可找到實數$r\ne 2$而C也通過$(r,5)$
(4)如果C通過$(4,8)$，則可找到實數$s\ne 8$而C也通過$(4,s)$
(5)如果C通過$(0,3)$，則C的頂點之y坐標為2。

$\boxed{答}$：(2)(3)(5) **（二次函數：標準式）**

$\boxed{解}$：抛物線C：$y=a(x-1)^2+k \xrightarrow{過(3,6)} 4a+k=6 \Rightarrow C$：$y=a(x-1)^2+6-4a$

(1)反例：當$a=1$，C：$y=(x-1)^2+2$與x軸無交點

(2)當$x=0$，$y=6-3a$，必有解，故C與y軸必相交

(3)當過$(2,5) \xrightarrow{a=\frac{1}{3}} C$：$y=\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{14}{3} \xrightarrow{過(r,5),r\neq 2} r=0$

(4)當過$(4,8) \xrightarrow{a=\frac{2}{5}} C$：$y=\frac{2}{5}(x-1)^2+\frac{22}{5} \xrightarrow{過(4,s),s\neq 8} s=8$，矛盾

(5)當過$(0,3) \xrightarrow{a=1} C$：$y=(x-1)^2+2$，故頂點$(1,2)$

10. 關於三次多項式$f(x)=x^3-6x^2+1$，試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $f(x)=0$有實根落在 0 與 1 之間
(2) $f(x)=0$有實根大於 1
(3) $f(x)=0$有實根小於-1
(4) $f(x)=0$有實根也有虛根
(5) $f(x)=10$有實數解

$\boxed{答}$：(1)(2)(5) **（方程式：勘根定理）**

$\boxed{解}$：(1)(2)(3)(4) $f(-1)=-6$、$f(0)=1$、$f(1)=-4$、$f(5)=-24$、$f(6)=1$

由勘根定理得知，在區間$(-1,0)$、$(0,1)$、$(5,6)$內各有一實根

(5) $\deg[f(x)-10]=3$，且爲實係數，故至少一實根

11. 考慮坐標空間中三平面$x+2y-3z=1$，$x+3y-2z=-1$及$x+by+cz=1$(b,c爲實數)，試問下列哪些敘述是正確的？
(1)當$b=1,c=1$時，三平面沒有共同交點
(2)當$b=-1,c=1$時，三平面恰交於一點
(3)當$b=4,c=-1$時，三平面恰交於一點
(4)當$b=1,c=-4$時，三平面恰交於一直線
(5)當$b=2,c=-3$時，三平面恰交於一直線。

$\boxed{答}$：(2)(5) **（空間中的平面：三個平面八個圖）**

$\boxed{解}$：$\begin{cases} E_1: x+2y-3z=1 \\ E_2: x+3y-2z=-1 \\ E_3: x+by+cz=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y-z=2 \\ (3-b)y+(-2-c)z=-2 \end{cases}$

(A)當$b=1$，$c=1$時，恰有一解，三平面應交於一點；故(A)錯

(B)當$b=-1$，$c=1$時，恰有一解，三平面應交於一點；故(B)正確

(C)當$b=4$，$c=-1$時，無解，三平面應兩兩相交，
產生三條直線，彼此互相平行；故(C)錯

(D)當$b=1$，$c=-4$時，無解，三平面應兩兩相交，
產生三條直線，彼此互相平行；故(D)錯

(E)當$b=2$，$c=-3$時，無限多解，三平面恰交於一直線；故(E)正確

12. 九十一學年度指定科目考試約有 5 萬 4 千名考生報考「數學甲」，考生得分情形（由低至高）如下表，第一列爲得分範圍（均含下限不含上限），第二列爲得分在該區間之人數佔全體考生之百分比。

0~10	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
10.45	8.18	11.85	14.96	16.0	15.28	10.81	7.06	3.84	1.57

試問下列有關該次考試考生得分之敘述有哪些是正確的？
(1)全體考生得分之中位數在 40 分(含)與 50 分(不含)之間
(2)全體考生得分(由低至高)之第一四分位數在 20 分(含)與 30 分(不含)之間
(3)全體考生得分(由低至高)之第三四分位數在 50 分(含)與 60 分(不含)之間
(4)不到三成的考生得分少於 30 分
(5)如果將得分 ≥ 60 分看成及格，則有四成以上的考生成績及格。

答：(1)(2)(3) **（統計：中位數、四分位數）**

解：(1) $10.45+8.18+11.85+14.96=45.44$ 、 $10.45+8.18+11.85+14.96+16.0=61.44$
故中位數在 40 分(含)與 50 分(不含)之間
(2) $10.45+8.18=18.63$ 、 $10.45+8.18+11.85=30.45$
故第一四分位數在 20 分(含)與 30 分(不含)之間
(3) $10.45+8.18+11.85+14.96+16.0=61.44$ 、
$10.45+8.18+11.85+14.96+16.0+15.28=76.72$
故第三四分位數在 50 分(含)與 60 分(不含)之間
(4)得分少於 30 分的考生佔 30.45%
(5) $10.81+7.06+3.84+1.57=23.28$ ，不到四成

第二部分：填充題

A. 某高中高三學生依選考類組分成三班，各班學生人數分別爲 40, 25, 35 人，
第一次段考數學科各班老師算出該班平均成績分別爲 69, 78, 74 分，
則這次考試全年級的平均成績是______分。(計算到整數爲止，小數點以後四捨五入。)

答：73 **（統計：平均數）**

解：$\dfrac{69\times 40+78\times 25+74\times 35}{40+25+35}=\dfrac{2760+1950+2590}{100}=73$

B. 設多項式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的餘式爲 $ax+b$，則 $a=$______，$b=$______。

答：$a=-8$ 、 $b=0$ **（多項式：餘式定理）**

解：$(x+1)^6=(x^2+1)Q(x)+ax+b \xrightarrow{x=i} -8i=ai+b \Rightarrow a=-8$ 、 $b=0$

C. 解方程式 $\log_3 x^7+\log_{\frac{1}{3}} x=24$，得 $x=$______。

答：81 **（指數對數：對數運算律）**

解：$7\log_3 x-\log_3 x=24 \Rightarrow \log_3 x=4 \Rightarrow x=3^4=81$

D. 試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\leq 0$ 有多少個整數解？

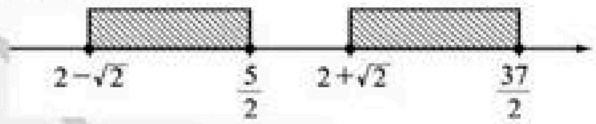
答：17（不等式：高次不等式）

解：$\left(x^2-4x+2\right)(2x-5)(2x-37)=0$ 的四根：$2+\sqrt{2}$、$2-\sqrt{2}$、2.5、18.5

$\left(x^2-4x+2\right)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 的解：$2-\sqrt{2}\le x\le 2.5$ 或 $2+\sqrt{2}\le x\le 18.5$

但 $x\in Z\Rightarrow x=1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18$

共17個整數解



E. 有一正四面體的公正骰子，四面點數分別為 1,2,3,4。將骰子丟三次，底面的點數分別為 a,b,c，則這三個數可作為三角形三邊長的機率是______。

答：$\dfrac{17}{32}$（機率：古典機率）

$$\underbrace{4\times\frac{3!}{3!}}_{\substack{\text{三同}\\444,\\333,\\222,\\111.}}+\underbrace{8\times\frac{3!}{2!}}_{\substack{\text{二同一異}\\443,442,441,\\334,332,331,\\223,221,}}+\underbrace{1\times 3!}_{432}$$

解：$P=\dfrac{4\times\frac{3!}{3!}+8\times\frac{3!}{2!}+1\times 3!}{4^3}=\dfrac{4+24+6}{64}=\dfrac{17}{32}$

F. 設 P 為橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的一點且位在上半平面。若 F_1、F_2 為 Γ 之焦點，且 $\angle F_1PF_2$ 為直角，則 P 點的 y 坐標為______。

答：$\dfrac{9}{4}$（圓錐曲線：橢圓、向量內積、圓）

解：$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 為橫橢型橢圓，中心 $(0,0)$、$a=5$、$b=3$、$c=4$

$F_1(4,0)$、$F_2(-4,0)$、$P(x,y)$，

又 $\angle F_1PF_2$ 為直角，則 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=(x-4,y)\cdot(x+4,y)=0\Rightarrow x^2-4^2+y^2=0$

$$\begin{cases}x^2+y^2=16\\ 9x^2+25y^2=225\end{cases}\Rightarrow y^2=\frac{81}{16}\Rightarrow y=\pm\frac{9}{4}\text{（取正）}$$

解：$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 為橫橢型橢圓，中心 $(0,0)$、$a=5$、$b=3$、$c=4$

$F_1(4,0)$、$F_2(-4,0)$，又 $\angle F_1PF_2$ 為直角，則 $P\in x^2+y^2=4^2$，$\overline{F_1F_2}$ 為直徑

$$\begin{cases}x^2+y^2=16\\ 9x^2+25y^2=225\end{cases}\Rightarrow y^2=\frac{81}{16}\Rightarrow y=\pm\frac{9}{4}\text{（取正）}$$

G. 設(a,b)為二次曲線$x^2+y^2-6x-2y+9=0$上的點，則a^2+b^2-2b的最大值為______。

答：15（圓：圓與點的距離）

解：$(a,b)\in(x-3)^2+(y-1)^2=1$，

則$(a-0)^2+(b-1)^2-1$表圓上的點(a,b)，到$(0,1)$的距離的平方，再減1

故$3-1\le\sqrt{(a-0)^2+(b-1)^2}\le 3+1\Rightarrow 3\le a^2+b^2-2b\le 15$

H. 在坐標平面上，一道光線通過原點O後，沿著y軸射向直線$L:y=\dfrac{1}{2}x+1$，碰到直線L後，假設光線依光學原理(入射角等於反射角)反射後通過x軸上的R點，則R點的x坐標為______。

答：$\dfrac{4}{3}$（平面上的直線：反射、對稱）

解：光線沿y軸交L於$P(0,1)$

過$(0,0)$且與$L:x-2y+2=0$垂直的直線為$L':2x+y=0$

L與L'交於$M\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，

故$O'\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$，則$\overleftrightarrow{O'P}:3x+4y-4=0$

$\overleftrightarrow{O'P}$與x軸交於$R\left(\dfrac{4}{3},0\right)$