98 年大學入學學科能力測驗試題

俞克斌老師　編校

第壹部分：選擇題（占 55 分）

一、單選題（占 30 分）

1. 數列 $a_1+2,\cdots,a_k+2k,\cdots a_{10}+20$ 共有十項，且其和為 240，
   則 $a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值為
   (1) 31　(2) 120　(3) 130　(4) 185　(5) 218　【98學測】

答：(3)（99 課綱第二冊第一章數列與級數）（尋找規律）

解：$\left(a_1+2\right)+\left(a_2+4\right)\cdots+\left(a_{10}+20\right)=240$

$\Rightarrow \left(a_1+a_2+\cdots+a_{10}\right)+\left(2+4+\cdots+20\right)=240$

$\Rightarrow \left(a_1+a_2+\cdots+a_{10}\right)+\left(\dfrac{22\cdot 10}{2}\right)=240 \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_{10}=130$

2. 令 $a=\cos\left(\pi^2\right)$，試問下列哪一個選項是對的？
   (1) $a=-1$　(2) $-1<a\le -\dfrac{1}{2}$　(3) $-\dfrac{1}{2}<a\le 0$
   (4) $0<a\le \dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}<a\le 1$　【98 學測】

答：(2)（99 課綱第三冊第一章三角）（弳度量）

解：$a=\cos\left(\pi^2\text{弳}\right)\approx\cos\left(3.1416^2\text{弳}\right)\approx\cos\left(9.87\text{弳}\right)$

$\approx\cos 565.5^\circ\approx\cos 205.5^\circ\approx-\cos 25.5^\circ$

3. 已知 $f(x),g(x)$ 是兩個實係數多項式，
   且知 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 x^4-1。
   試問下列哪一個選項不可能是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的公因式？
   (1) 5　(2) $x-1$　(3) x^2-1　(4) x^3-1　(5) x^4-1　【98 學測】

答：(4)（99 課綱第一冊第二章多項式函數）（輾轉相除法）（非學測範圍）

解：$f(x)=g(x)q(x)+x^4-1$

由輾轉相除法可知 $H.C.F\left(f(x),g(x)\right)=H.C.F\left(g(x),x^4-1\right)$

$f(x)$ 與 $g(x)$ 的公因式就可能為 x^4-1 的因式，故不可能為 x^3-1

4. 甲、乙、丙三所高中的一年級分別有3、4、5個班級。
   從這12個班級中隨機選取一班參加國文抽考，
   再從未被抽中的11個班級中隨機選取一班參加英文抽考。
   則參加抽考的兩個班級在同一所學校的機率最接近以下哪個選項？
   (1) 21%　(2) 23%　(3) 25%　(4) 27%　(5) 29%　【98 學測】

答：(5)（99 課綱第二冊第三章機率）（古典機率）

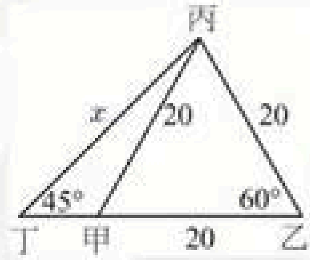
解：樣本空間 $=C_1^{12}C_1^{11}=132$

事件：『同甲』或『同乙』或『同丙』$=C_1^3C_1^2+C_1^4C_1^3+C_1^5C_1^4=38$

所求機率$=\dfrac{38}{132}=0.287$，故選(5)

5. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆爲20公里。
兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。
今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角爲45°，
則丙、丁兩鎮間的距離約爲
(1) 24.5 公里 (2) 25 公里 (3) 25.5 公里 (4) 26 公里 (5) 26.5 公里 【98學測】

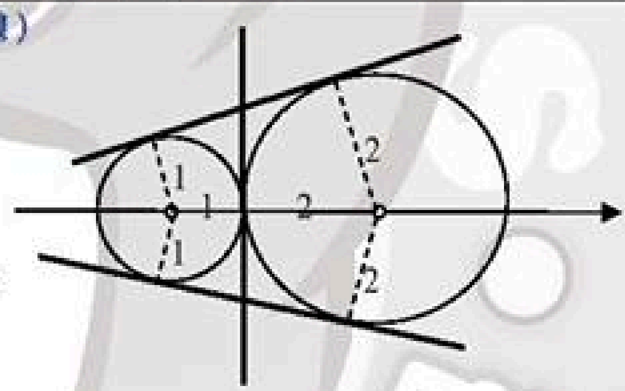
答：(1) **（99 課綱第三冊第一章三角）（正弦定律）**



解：根據題意畫出右圖，
利用三角函數的正弦定理
$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{20}{\sin 45^\circ}\Rightarrow x=10\sqrt{6}\approx 24.49$$

6. 試問坐標平面上共有幾條直線，會使得點$O(0,0)$到此直線之距離爲1，
且點$A(3,0)$到此直線之距離爲2？
(1) 1 條 (2) 2 條 (3) 3 條 (4) 4 條 (5)無窮多條 【98學測】

答：(3) **（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（圓與切線）**



解：能夠推論出與一定點距離固定的直線，
是以此定點爲圓心，
並以此固定距離爲半徑所得圓的所有切線。
根據題意可知，滿足條件的直線爲
$x^2+y^2=1$與$(x-3)^2+y^2=4$兩圓之公切線，
因爲兩圓的圓心距等於兩圓半徑和，
兩圓的關係爲外切，
故兩圓之公切線包含一條內公切線與
兩條外公切線，故滿足條件的直線有三條，如圖所示.

二、多選題（占 25 分）

7. 試問下列哪些選項中的數是有理數？
(1) 3.1416 (2) $\sqrt{3}$ (3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}$
(4) $\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$ (5) 方程式$x^3-2x^2+x-1=0$的唯一實根 【98學測】

答：(1)(3)(4) **（99 課綱第一冊第一章數與式）（有理數）（對數、三角函數、牛頓定理）**

解：(1) 3.1416是有限小數，故爲有理數.
(2) $\sqrt{3}$是無法開出的根號，故爲無理數.
(3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$，故爲有理數.
(4) $\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}=\dfrac{(\sin 15^\circ)^2+(\cos 15^\circ)^2}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\sin 30^\circ}=4$，故爲有理數.
(5) 方程式$x^3-2x^2+x-1=0$若有有理根，只有可能爲 1 或-1，

將 1 與 -1 分別代入 $x^3-2x^2+x-1=0$ 均不為 0，

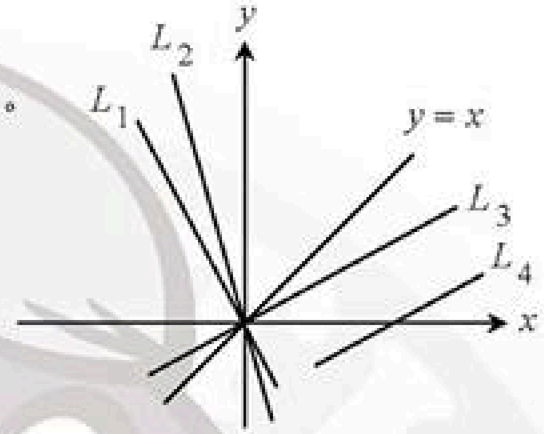
故 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根不為有理數

8. 坐標平面上四條直線 L_1, L_2, L_3, L_4 與 x 軸、y 軸及直線 $y=x$ 的相關位置如圖所示，其中 L_1 與 L_3 垂直，而 L_3 與 L_4 平行。

設 L_1, L_2, L_3, L_4 的方程式分別為

$y=m_1x$，$y=m_2x$，$y=m_3x$ 以及 $y=m_4x+c$。

試問下列哪些選項是正確的？



(1) $m_3>m_2>m_1$

(2) $m_1\cdot m_4=-1$

(3) $m_1<-1$

(4) $m_2\cdot m_3<-1$

(5) $c>0$　　【98 學測】

答：(2)(3)(4)（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（直線斜率）

解：$L_1: y=m_1x \longrightarrow m_1<0$

$L_2: y=m_2x \longrightarrow m_2<0$

$L_3: y=m_3x \longrightarrow m_3>0$

$L_4: y=m_4x+c \rightarrow m_4>0, c<0$

L_1 與 L_3 垂直，L_3 與 L_4 平行 $\Rightarrow m_1\cdot m_3=m_1\cdot m_4=-1$，故 $m_2\cdot m_3<-1$

9. 某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比(以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在95%信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 $[0.50, 0.58]$、$[0.08, 0.16]$。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) 甲地本次的受訪者中，54%的人聽過該產品

(2) 此次民調在乙地的受訪人數少於在甲地的受訪人數

(3) 此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於95%

(4) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有95%的機會落在區間 $[0.08, 0.16]$

(5) 經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加受訪人數達原人數的四倍，則在95%信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半(即 0.04)　【98學測】

答：(1)(2)（99 課綱第二冊第四章數據分析）（民意調查、信賴區間）（非學測範圍）

解：(1)正確：甲地知名度之 95%信心水準之信賴區間 $[0.50, 0.58] \Rightarrow \hat{p}_{甲}=0.54$

乙地知名度之 95%信心水準之信賴區間 $[0.08, 0.16] \Rightarrow \hat{p}_{乙}=0.12$

(2)正確：$\sigma_{甲}=\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n_{甲}}}=\dfrac{\sqrt{0.54\times0.46}}{\sqrt{n_{甲}}}=0.02 \quad \Rightarrow \quad n_{甲}=621$

$$\sigma_{乙}=\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n_{乙}}}=\frac{\sqrt{0.12\times0.88}}{\sqrt{n_{乙}}}=0.02 \quad \Rightarrow \quad n_{乙}=264$$

(3) 此次調查結果可解讀為：我們有95%的信心（不是機率）說甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品。故(3)錯誤

(4) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，我們有95%的信心（不是機率）說乙地全體居民中聽過該產品的『知名度』落在區間$[0.08, 0.16]$。故(4)錯誤

(5)若再次進行民調，抽樣所的知名度可能會變（亦即$\hat{p}$改變），乙地知名度之95%信心水準之信賴區間寬度可能會改變，但不一定是減半

10. 設a,b,c爲實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$的敘述

哪些是正確的？

(1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解

(2) 若此線性方程組有解，則$11a-3b\neq 7$

(3) 若此線性方程組有解，則$c=14$

(4) 若此線性方程組無解，則$11a-3b=7$

(5) 若此線性方程組無解，則$c\neq 14$　　【98學測】

答：(4)(5)（**99課綱第四冊第二章空間中的直線與平面**）（**克拉瑪法則**）

解：$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}=22a-6b-14$、$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & c \end{vmatrix}=28-2c$

(1)(2)(3) 當方程組恰一組解，$\Delta\neq 0$，即$11a-3b\neq 7$，
當方程組有無限多解，$\Delta=0$且$\Delta_z=0$，即$11a-3b=7$且$c=14$

(4)(5) 當方程組無解（依題目數據是三平面交出三平行線），
$\Delta=0$且$\Delta_z\neq 0$，即$11a-3b=7$且$c\neq 14$

解：$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+(3a-b)z=4 \\ 6y+(7-2a)z=c-2 \end{cases}$

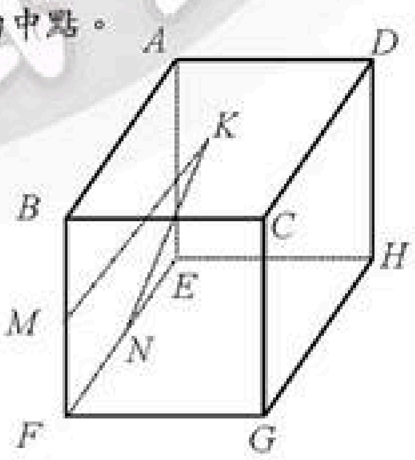
(1)當$\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{3a-b}{7-2a}$時，即$11a-3b\neq 7$，方程組恰一組解

(2)當$\dfrac{2}{6}=\dfrac{3a-b}{7-2a}=\dfrac{4}{c-2}$時，即$11a-3b=7$且$c=14$，方程組有無限多解

(3)當$\dfrac{2}{6}=\dfrac{3a-b}{7-2a}\neq\dfrac{4}{c-2}$時，即$11a-3b=7$且$c\neq 14$，方程組無解

故選(4)(5)

11. 如圖所示，正立方體$ABCD-EFGH$的稜長等於2（即$\overline{AB}=2$），K爲正方形$ABCD$的中心，M、N分別爲線段BF、EF的中點。試問下列哪些選項是正確的？



(1) $\overrightarrow{KM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

(2) (內積) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=1$

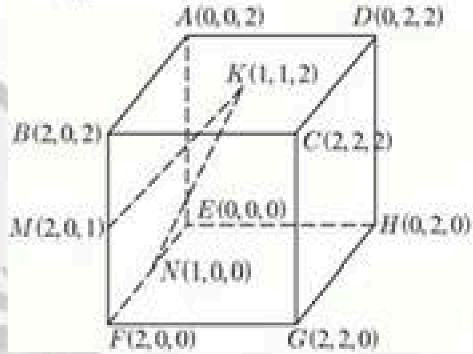
(3) $\overline{KM}=3$

(4) ΔKMN爲一直角三角形

(5) ΔKMN之面積爲$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　【98學測】

答：(1)(4)（99 課綱第四冊第一章空間向量）（空間座標、空間向量）

解：將圖中正立方體 $ABCD-EFGH$ 坐標化(如下圖)



(1) $\overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(2,0,0)-\frac{1}{2}(0,2,0)+\frac{1}{2}(0,0,-2)$

$=(1,-1,-1)$

(2) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)\cdot(2,0,0)=2\neq 1$

(3) $\because \overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)\ \therefore \overrightarrow{KM}=\sqrt{3}$,

(4) $\because \overrightarrow{KM}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}=(1,-1,-1)\cdot(-1,0,-1)=0$

$\therefore \triangle KMN$ 為一直角三角形,

(5) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{KM}\right|^2\left|\overrightarrow{MN}\right|^2-\left(\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{MN}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

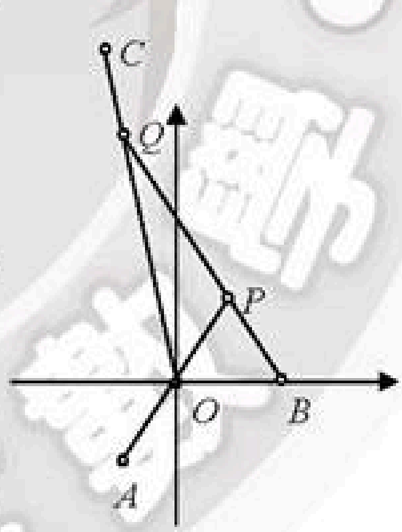
第貳部份：選填題（占 45 分）

A. 從 1 到 100 的正整數中刪去所有的質數、2 的倍數及 3 的倍數之後，剩下最大的數為________ 【98學測】

答：95（質數）

解：從 100 起往下刪除質數(97)、2 的倍數(100, 98, 96)及3 的倍數(99, 96)，即可得答案為 95

B. 坐標平面上有四點 $O(0,0)$，$A(-3,-5)$，$B(6,0)$，$C(x,y)$。
今有一質點在 O 點沿 $\overrightarrow{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在 P，
再沿 $\overrightarrow{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q。
假設此質點繼續沿 $\overrightarrow{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O，
則 $(x,y)=$________ 【98學測】



答：$(-4,20)$（99 課綱第三冊第三章平面向量）（係數積）

解：因為 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AO}$，故 $P(3,5)$

因為 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{BP}$，故 $Q(-3,15)$

因為 $\overrightarrow{QO}=3\overrightarrow{CQ}$，故 $C(-4,20)$

C. 抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。
只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，
其金額分別為(抽得藍色球者)2000元、(抽得紅色球者)1000元。
箱中已置有2顆藍色球及5顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，
主辦單位希望參加者所得消費券金額的期望值為300元，
則主辦單位應於箱內再置入________顆其他顏色的球。 【98學測】

答：23（99 課綱第五冊第一章機率統計 II）（期望值）（非學測範圍）

解：設置入 n 顆其他顏色的球

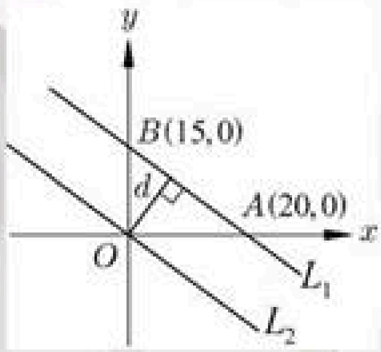
事件	藍色	紅色
機率	$\dfrac{2}{n+7}$	$\dfrac{5}{n+7}$
利益	2000	1000

$$\therefore E(X)=2000\times\frac{2}{n+7}+1000\times\frac{5}{n+7}=300 \Rightarrow n+7=30 \Rightarrow n=23$$

D. 坐標平面上有兩條平行直線。它們的 x 截距相差20，y 截距相差15。
則這兩條平行直線的距離爲________【98學測】

答：12（99 課綱第三冊第二章直線與圓）（點到直線的距離）

解：根據題意，將兩條平行直線的其中一條定爲過 $(20,0)$ 與 $(0,15)$ 直線 L_1，
另一條則是與 L_1 平行 且過原點的直線 L_2，如圖所示



L_1 爲 $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{15}=1$，

兩條平行線的距離爲原點到直線 L_1 的距離 d

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{15}\right)^2}}=12$$

另解：利用圖中，直角三角形 OAB 的面積可得 $\overline{AB}\times d=\overline{OA}\times\overline{OB}$，

$$d=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{20\times15}{\sqrt{(20)^2+(15)^2}}=12$$

E. 假設 Γ_1 爲坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸爲 $x=-\dfrac{3}{4}$ 且焦距
（焦點到頂點的距離）爲 $\dfrac{1}{8}$。若 Γ_1 與另一拋物線 $\Gamma_2: y=x^2$ 恰交於一點，
則 Γ_1 的頂點之 y 坐標爲________（化成最簡分數）【98學測】

答：$\dfrac{9}{8}$（99 課綱第四冊第四章二次曲線）（拋物線）

解：設 Γ_1：$\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2=4\left(\dfrac{1}{8}\right)(y-k)$

因爲與 $\Gamma_2: y=x^2$ 恰交於一點，故解聯立：$\begin{cases}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=4\left(\frac{1}{8}\right)(y-k)\\ y=x^2\end{cases}$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=4\left(\frac{1}{8}\right)\left(x^2-k\right) \Rightarrow 8x^2+24x+(9+8k)=0$$

判別式 $=(24)^2-4\times8\times(9+8k)=0 \Rightarrow k=\dfrac{9}{8}$

F. 某公司爲了響應節能減碳政策，
決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降爲目前排放量的75%。
公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。

若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少______ %的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。) 【98學測】

答：5.6（99 課綱第一冊第三章指數、對數函數）（生活指數、取對數、對數運算律）

解：$(1-p)^5 \le 75\% = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 5\log(1-p) \le \log 3 - \log 4$

$\Rightarrow \log(1-p) \le \dfrac{\log 3 - \log 4}{5} = -0.02498 = -1 + 0.97502 = \log(0.9444)$

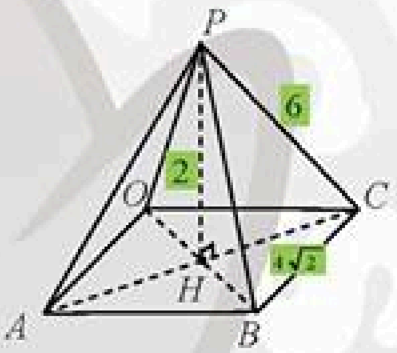
$\Rightarrow 1-p \le 0.9444 \Rightarrow p \ge 0.0556 = 5.6\%$

G. 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，
其頂點爲 $O(0,0,0)$、$A(8,0,0)$、$B(8,8,0)$、$C(0,8,0)$。
另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O,A,B,C 四點的距離皆等於 6，
若 $x+by+cz=d$ 爲通過 A,B,P 三點的平面，則 $(b,c,d)=$______ 【98學測】

答：$(0,2,8)$（99 課綱第二章空間中的直線與平面）（外積與平面法向量、平面方程式）

解：由圖可知：$\overline{HM}=\overline{BM}=4$，$\overline{PB}=6$

$\overline{PM}=2\sqrt{5}$，則 $\overline{PH}=2$，故 $P(4,4,2)$



又 $\overrightarrow{PA}=(4,-4,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(4,4,-2)$

則通過 A,B,P 三點的平面的法向量爲

$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=(16,0,32)//(1,0,2)$

故通過 A,B,P 三點的平面爲：

$1(x-8)+0(y-0)+2(z-0)=0 \Rightarrow x+0y+2z=8$

H. 有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1、F_2，
且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。
設 P 爲此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，
則 $\overline{F_1F_2}=$______ 【98學測】

答：16（99 課綱第四冊第四章二次曲線）（橢圓、雙曲線）

解：就橢圓而言：$c=c, b=t \Rightarrow a=\sqrt{t^2+c^2} \Rightarrow \overline{PF_2}+\overline{PF_1}=2\sqrt{t^2+c^2}$

就雙曲線而言：$c=c, a=t \Rightarrow b=\sqrt{c^2-t^2} \Rightarrow \overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2t$

兩式平方相減：$4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=4c^2 \Rightarrow 64=c^2 \Rightarrow c=8$，故 $\overline{F_1F_2}=2c=16$

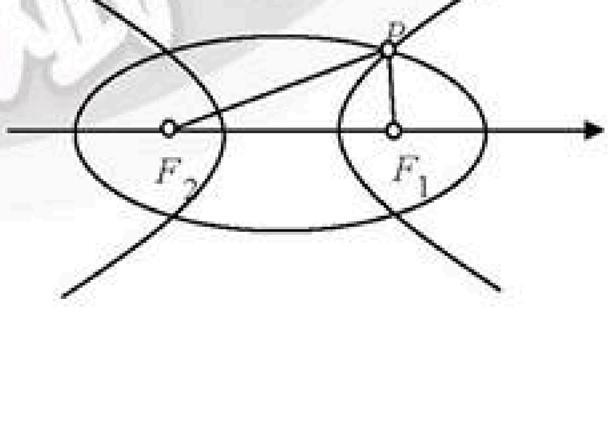
解：就橢圓而言：$\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=2a$

就雙曲線而言：$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a'=2b$

則 $\overline{PF_2}=a+b$、$\overline{PF_1}=a-b$

故 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2=c^2=64$

$\Rightarrow c=8$，故 $\overline{F_1F_2}=2c=16$



I. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=10,\overline{AC}=9,\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$。

設點 P、Q 分別在邊 AB、AC 上使得 ΔAPQ 之面積爲 ΔABC 面積的一半，

則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值爲_______【98 學測】

答：$\dfrac{15}{2}$（99 課綱第三冊第一章三角）（面積公式、餘弦定律、算幾不等式）

解：(1) ∵ ΔAPQ 之面積爲 ΔABC 面積之一半，

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\sin A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A\right)\Rightarrow \overline{AP}\cdot\overline{AQ}=45$$

(2) $\cos A=\dfrac{\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2}{2\overline{AP}\cdot\overline{AQ}}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow \overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\dfrac{135}{4}$

(3) 又由算幾不等式知 $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2\geq 2\sqrt{\overline{AP}^2\cdot\overline{AQ}^2}=90$

故 $\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2-\dfrac{135}{4}\geq 2\overline{AP}\cdot\overline{AQ}-\dfrac{135}{4}=90-\dfrac{135}{4}=\dfrac{225}{4}\Rightarrow \overline{PQ}\geq\dfrac{15}{2}$