俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 100 天：數列極限

觀念篇

(1) 收斂：

無窮數列$\langle a_n \rangle$，當項數n愈來愈大，數列$\langle a_n \rangle$會非常接近（趨近）於某一定數α，
則稱此種數列為收斂數列。
定數α稱為此數列的極限，記為$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，
其中符號“$\rightarrow$”代表趨近或逼近，符號“∞”代表無限大。

(2) 發散：

若無窮數列$\langle a_n \rangle$，當項數n愈來愈大，數列$\langle a_n \rangle$的值不會趨近於一定數，
則稱此種數列為發散數列，此時數列$\langle a_n \rangle$的極限不存在。

(3) 數列極限的四則運算：

若數列$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$皆為收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$，則
數列$\langle a_n+b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha+\beta$。
數列$\langle a_n-b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha-\beta$。
數列$\langle a_n\times b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha\times\beta$。
數列$\langle a_n\div b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha\div\beta$。當然$b_n\neq 0$、$\beta\neq 0$。

(4)

斂散性 / 數列	和、差	積	商
兩收斂數列	收斂	收斂	收斂（分母極限$\neq 0$）
一收斂、一發散數列	發散	收斂或發散	收斂或發散
兩發散數列	收斂或發散	收斂或發散	收斂或發散

(5) n在分母型：$f(x)$、$g(x)$均為多項函數，$\left\langle \dfrac{g(x)}{f(x)} \right\rangle$的斂散規則為

當$\deg g(x)>\deg f(x)$，數列發散。
當$\deg g(x)<\deg f(x)$，數列收斂，極限為0。
當$\deg g(x)>\deg f(x)$，數列收斂，極限為$f(x)$、$g(x)$領導係數比。

例題篇：鑑往之傾向

1. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\dfrac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=$______。【106 年指考數甲】

答：12

2. 當 n 為正整數時，令 $x=a_n$、$y=b_n$、$z=c_n$ 為三元一次聯立方程組 $\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=0\\-2nx+ny+3z=8n\end{cases}$ 之唯一解，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______【99 年指考數甲】

答：-2

3. 一盒子裡有 n（$n>3$）顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=$______。

【104 年指考數甲】

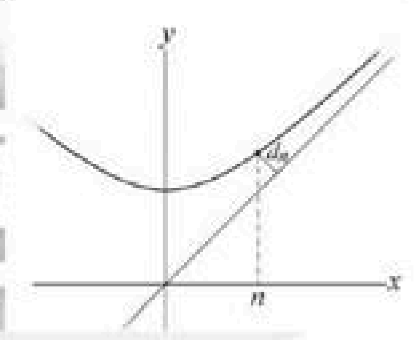
答：15

4. 設 n 為正整數，座標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是 $(0,2)$、$\left(\dfrac{1}{n},0\right)$、$\left(-\dfrac{1}{n},0\right)$，假設此三角形的外接圓直徑長度等於 D_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty}D_n=$______

【91 年指考數甲】

答：2

5. 考慮雙曲線 $y^2-x^2=1$ 圖形的上半部（如右圖），取此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y=x$ 的距離，記為 d_n，其中 n 為正整數。則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot d_n\right)=$______。



【94 年指考數甲】

答：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6. 設 n 為正整數，方程式 $x^2-2x-n=0$ 的兩根為 a_n 與 b_n，且 $a_n>b_n$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_n > 0$ 對所有 n 皆成立　(2) $a_n + b_n = 2$ 對所有 n 皆成立

(3) $b_{n+1} > b_n$ 對所有 n 皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n a_{n+1}}{n} = 1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - b_n}{\sqrt{n}} = 2$

【97 年指考數甲】

答：(1)(2)(4)(5)

例題篇：知來之對策

1. $S_n = 1\cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots\ldots + n\cdot 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^3} =$ ________。

2. 已知 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 均為公差不為 0 的等差數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$，$k$ 為一定實數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{nb_{2n}} =$ ？

3. 設 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n = 5n^2$，對所有自然數 n 均成立，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{a_2 + a_4 + \cdots\cdots + a_{2n}} - \sqrt{a_1 + a_3 + \cdots\cdots + a_{2n-1}}\right)$ 之值。

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4a_n - 2}{5a_n + 1} = 2$，求 $\langle a_n \rangle$ 極限值________。