

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 98 天 : 夾擊定理

### 觀念篇

給定一個數列  $\langle b_n \rangle$ ，若存在兩個數列  $\langle a_n \rangle$  與  $\langle c_n \rangle$  滿足：

(1) 從某一項  $n \geq n_0$  後，恆有  $a_n \leq b_n \leq c_n$ 。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$

則數列  $\langle b_n \rangle$  是收斂數列，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. (1) 試證： $n^2 \leq 2^n$  對所有大於或等於 4 之自然數  $n$  均成立。

(2) 試證： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

[79 日自]

### 例題篇：知來之對策

1. 若  $a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}$ ，則

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$  之值為\_\_\_\_\_。(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$  之值為\_\_\_\_\_。

2. 若  $a_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n}$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  之值為\_\_\_\_\_。

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{x}{4} \right]}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。( [ ] 表高斯符號)

4. (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ \frac{n}{3} \right]}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。( [ ] 表高斯符號)

(2) 利用(1)，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + \left[ \frac{n}{3} \right]} - n \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( 2\pi \sqrt{n^2 + \left[ \frac{n}{3} \right]} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

5. (1) 試證： $n^3 \leq 2^n$  對所有大於或等於10之自然數 $n$ 均成立。

(2) 試證： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

6. (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{100}$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{999}}$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$ 。

