

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 96 天 : 函數極限

### 觀念篇

設  $f(x)$  為一個函數，

當  $x$  趨近  $a$  時，函數  $f(x)$  會趨近於一個固定的實數  $p$ ，

則稱函數  $f(x)$  在  $x$  趨近  $a$  時的極限為  $p$ ，記為： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$ 。

① “ $x \rightarrow a$ ” 的意思為 “ $x$  從  $a$  的左、右兩邊極端靠近  $a$ ”。

② 因此函數  $f(x)$  在  $x = a$  時不一定有定義，即  $f(a)$  不一定存在。

③ 即使  $f(a)$  存在， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$  也不一定等於  $f(a)$ 。

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 試問下列有關極限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3 - 3x - x^2| - 1}{x - 1}$  的敘述何者正確？

- (1) 極限不存在    (2) 極限為 0    (3) 極限為 1  
(4) 極限為 5    (5) 極限為 -2    [96 數甲]

答：(4)

### 例題篇：知來之對策

1. 求： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{76} - 1}{x}$

2. 試求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ ， $n \in N$

3. 試求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cdot \left( \frac{1-x^{20}}{1-x} - 20 \right)$

4. 求： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$ ， $n \in N$

5. 若  $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}} - 2}{x-81}$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 81} f(x)$  之值為\_\_\_\_\_。

6. 已知  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x+1} - a}{\sqrt[3]{x} - 3}$  存在且其值為  $b$ ，試求數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(hint: 視  $\sqrt[3]{x}$  為另一變數)

7. 設  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^3 + cx + d}{x^2 + 3x - 4}$ ， $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，已知  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ，  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ ，則序組  $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若多項式  $f(x)$  滿足  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x) - 3x^3}{x^2} \right) = 4$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ ，  
 則多項式  $f(x)$  為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

9.  $f(x) = \frac{a\sqrt{x^2 + 5} - b}{x - 2}$ ，滿足  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  且  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = k$  存在，  
 則  $(a, b, k) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。