

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 94 天 : 連續、中間值定理

觀念篇

(1) 若函數 $f(x)$ 滿足下列條件：

- ① $f(a)$ 存在。
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在。
- ③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

(2) 若函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續，則稱函數 $f(x)$ 為連續函數。

(3) 多項式函數、指數函數、對數函數、正弦函數、餘弦函數，
若沒有特別限制時，均連續函數。

(4) ① 中間值定理：

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b] \equiv a \leq x \leq b$ 上是連續函數，

且 $f(a) \neq f(b)$ ，而 k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的任一實數，

則在開區間 $(a, b) \equiv a < x < b$ 之間至少存在一個實數 c ，

使得 $f(c) = k$ 。

② 勘根定理：

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b] \equiv a \leq x \leq b$ 上是連續函數，

且 $f(a)f(b) < 0$ ，

則在開區間 $(a, b) \equiv a < x < b$ 之間至少存在一個實數 c ，

使得 $f(c) = 0$ 。

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1，

已知 $f(1)=1$ 、 $f(2)=2$ 、 $f(5)=5$ 。

則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？

(1) $(-\infty, 0)$ (2) $(0, 1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 5)$ (5) $(5, \infty)$ 【96 學測】

答：(2)(4)

2. 設 x 為一正實數且滿足 $x \cdot 3^x = 3^{18}$ ；若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，

則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【94 學測】

答：15

3. 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。

若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，

試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $P(x)=0$ 與 $Q(x)=0$ 有共同的實根
 (2) 3 是 $P(x)=2$ 唯一的實根
 (3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除
 (4) $P(x)=0$ 一定有小於 3 的實根
 (5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是 2

【96 數甲】

答：(3)(4)

例題篇：知來之對策

1. 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ \frac{ax^2 - x + b}{x - 2} & x < 2 \end{cases}$ 為一連續函數，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. $a, b \in \mathbb{R}$ ，若函數 $f(x) = \begin{cases} -4x + (3a - 1) & x \leq -2 \\ ax^2 - bx + 3 & -2 < x \leq 1 \\ \sqrt{bx^2 + 15} & x > 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上為連續函數，
 求序對 (a, b) 之值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知方程式 $x^2 - \log_{10} x - 200 = 0$ 有兩個實數根，其中有一根介於 0 與 1 之間，
 另一根介於 N 與 $N+1$ 之間，則整數 $N = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. $n \in \mathbb{N}$ ，若已知 $f(x) = n^2 x^3 + nx - 1 = 0$ 僅有一個實根，
 (1) 證明此實根 $x_0 \in \text{區間} \left(0, \frac{1}{n}\right)$
 (2) 當 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，所對應的實根 x_n ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

俞克斌數