

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 91 天 : 可微分、導函數

觀念篇

(1) 可微分：當 $x \rightarrow a^+$ 時， $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$ 存在

當 $x \rightarrow a^-$ 時， $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha$ 存在

則稱 $f'(a)$ 存在，或稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處可微分。

(2) 導函數：若函數 $f(x)$ 在 $x \in (p, q)$ 開區間內每一個點 a 都可微分，亦即 $f(x)$ 在 $x \in (p, q)$ 開區間內每一個點 a 的導數 $f'(a)$ 都存在，則稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 在 $x \in (p, q)$ 開區間內的導函數。

(3) 微分三部曲：極限值存在 $\xrightarrow{\text{不一定}}$ 連續 $\xrightarrow{\text{不一定}(a)}$ 可微分
 $\xleftarrow{\text{必定}}$ $\xleftarrow{\text{必定}(b)}$

例題篇：鑑往之傾向

例題篇：知來之對策

1. 已知 $f(x) = |x^2 + 3x|$ 在 $x = -3$ 處圖形連續，
試證： $f(x)$ 在 $x = -3$ 處不可微分。

2. 已知函數 f 在 $x = a$ 點『可微分』，亦即 $f'(a)$ 存在，
試證：函數 f 在 $x = a$ 點為『連續』。

3. 函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ \frac{ax - b}{x + 1}, & x > 1 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處的導數存在，求 a 、 b 之值。

4. 設 $a, b \in R$ ，若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若 $f'(0)$ 存在，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 設 $f(x) = \begin{cases} ax+b[x], & x \geq 2 \\ x^2 & , x < 2 \end{cases}$, 其中 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數。
若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處可微分, 則常數數對 (a,b) 為_____。

6. 若 $f(x)$ 為『偶函數』, 且 $f'(x)$ 存在, 求證 $f'(x)$ 為『奇函數』。
反之, 若 $f(x)$ 為『奇函數』, 且 $f'(x)$ 存在, 求證 $f'(x)$ 為『偶函數』。

