

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 85 天 : 極大極小

觀念篇

(1) 極大值與極小值：

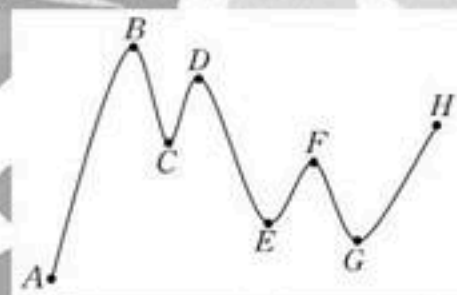
若在 $(a, f(a))$ 附近的點 x ，其函數值皆小於 $f(a)$ ，稱 $f(a)$ 為極大值。

若在 $(b, f(b))$ 附近的點 x ，其函數值皆大於 $f(b)$ ，稱 $f(b)$ 為極小值。

設函數 $y = f(x)$ 在區間 I 的圖形如右，則：

極大值發生的點在 B 、 D 、 F 、 H (端點)

極小值發生的點在 A (端點)、 C 、 E 、 G 點



(2) 最大值與最小值：

在區間 I 內找到 α 與 β ，

使得 $\forall x \in I$ ，恆有 $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ ，

稱 $f(\alpha)$ 為區間 I 內之最小值， $f(\beta)$ 為區間 I 內之最大值。

最大值發生的點在 B 點；

最小值發生的點在 A 點；

觀念辨正：(i) 函數在區間 I 的最大值及最小值都只能有一個

(ii) 最大值及最小值可以發生在不只一個點。

(iii) 極大值與極小值可以不只一個。

(iv) 極大值有可能小於極小值

(3) 多項式函數極值的檢定法

(i) 費馬定理：多項式函數 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 上有極值 $f(\alpha)$ ，則 $f'(\alpha) = 0$

(ii) 多項式函數 $f(x)$ 極值可能發生的點：

① $f'(x) = 0$ 的點 ② 閉區間 $[a, b]$ 的端點。

(iii) 極大值或極小值的判斷：

① 當 $x < \alpha$ 時 $f(x)$ 遞增且 $x > \alpha$ 時 $f(x)$ 遞減，則 $f'(\alpha) = 0$ 處為極大點

(或： $f''(\alpha) < 0$ ，表 $f'(x)$ 遞減，此時 $f'(\alpha) = 0$ 處為極大點)

當 $x < \alpha$ 時 $f(x)$ 遞減且 $x > \alpha$ 時 $f(x)$ 遞增，則 $f'(\alpha) = 0$ 處為極小點

(或： $f''(\alpha) > 0$ ，表 $f'(x)$ 遞增，此時 $f'(\alpha) = 0$ 處為極小點)

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮多項式函數 $f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 6x$ 。請選出正確的選項：

(1) 函數 f 的圖形在點 $(1, -1)$ 的切線斜率為正 (2) 函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點

(3) 函數 f 唯一相對極小值為 $-\frac{9}{4}$ (4) $f(\pi) > 0$

(5) $f\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right) > 0$

【103 數甲】

答：(3)(4)

2. 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x) = 8x + 11$ ，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，

則 $f'(0) =$ _____ 【99 數甲】

答：-15

3. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式， $g(x)$ 為實係數三次多項式。

已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$ ，

而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ ， $x=0$ 及 $x=4$ ，

且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的(相對)極小值皆發生於 $-4 < x < 0$ 。請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正

(2) $f(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$ (3) $g(x)$ 的(相對)極小值發生於 $x=-2$

(4) $g(-1) = g(-3)$ (5) $g(-1) = -g(1)$ 【104 數甲】

答：(2)(5)

例題篇：知來之對策

1. 若 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$ ， $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$ ，

設當 $x=a$ 時， $g(x)$ 有最小值 b ，則數對 $(a, b) =$ _____。

2. 設三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，

又已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 時有極值 2，試求 $f(-1) =$ _____。