

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 83 天 : 極值應用

觀念篇

參閱倒數 85 天

例題篇：鑑往之傾向

1. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為 432 平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為_____公分。【96 數甲】

答：12

2. 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。

- (1) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？
(2) 試求定海神針原來的長度。
(3) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。【95 數甲】

答：(1) 2 秒 (2) 60 公分 (3) 220 公分

3. 職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p ，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0 \leq p \leq 1$ ），請選出正確的選項：

- (1) 只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為 $p^3 + (1-p)^3$
(2) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式
(3) $f(p)$ 的常數項等於 3
(4) 函數 $f(p)$ 在 $p = \frac{1}{2}$ 時有最大值
(5) $f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{4}{5}\right)$

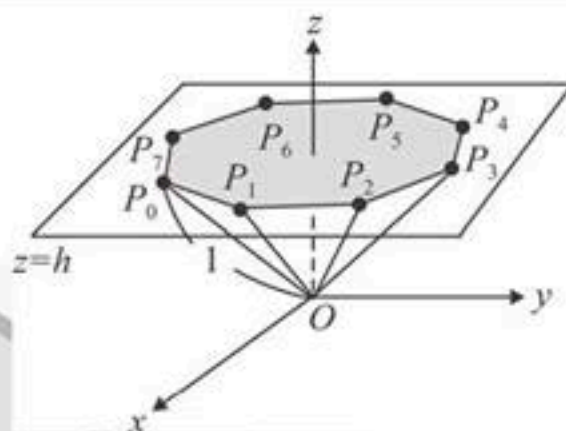
【103 數甲】

答：(1)(3)(4)

4. 坐標空間中， $O(0,0,0)$ 為原點。

平面 $z=h$ （其中 $0 \leq h \leq 1$ ）上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取8點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ ，使得各線段 $\overline{OP_j}$ （ $0 \leq j \leq 7$ ）的長度都是1。

請參見示意圖。



(1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_4}$ 。(4分)

(2) 若 $V(h)$ 為以 O 為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 為底的正八角錐體積，

試將 $V(h)$ 表為 h 的函數（註：角錐體積 $=\frac{1}{3}$ 底面積 \times 高）。(2分)

(3) 在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 90° 的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$ 的最大值為何？(6分)

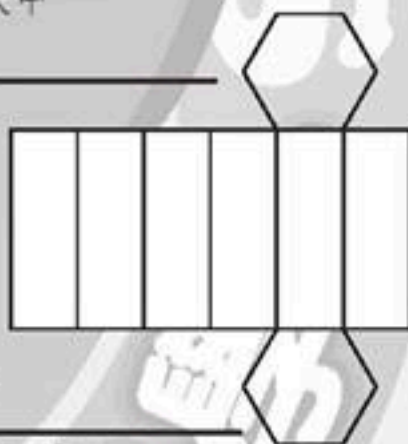
【106數甲】

答：(1) $2h^2 - 1$ (2) $V(h) = \frac{2\sqrt{2}}{3}(-h^3 + h)$ (3) $\frac{1}{3}$

例題篇：知來之對策

1. 某地 A ，一日之降雨機率為 p ，不降雨機率為 $1-p$ ，今連續四天中只有一天下雨的機率為 q ，求 q 之極大值_____。

2. 家喻戶曉的大熊餅乾，其餅乾盒為一正六角柱；公司欲重新設計紙盒大小，但仍維持正六角柱造型。公司先設定餅乾盒的表面積為定值 $360\sqrt{3}$ 平方公分，若盒蓋（即正六邊形）邊長為 a 公分及盒高為 b 公分時，可讓餅乾盒體積有最大值。求 $a:b$ 的比值_____。



3. 有一河寬一公里，自北岸一發電廠架設電纜至下游五公里南岸的工廠，架設方法為先沿河岸架設 x 公里，再經水底直線連接至工廠。

如圖所示，假設水底架設費用是地面架設費用的 $\frac{5}{3}$ 倍，試問當 $x=$ _____時，架設的路線最為經濟。



4. 如圖， A 是半徑 r 的圓 O 上一點， L 是過 A 點的切線， P 是圓 O 上的動點，由 P 點作線段 PQ 垂直 L ，垂足 Q 在 L 上，求 $\triangle APQ$ 面積的最大值。

