

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 81 天 : 凹口方向、反曲點

觀念篇

已知 $\deg f(x) \geq 2$ 。

- (1) 當 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 上的圖形為凹口向上 $\Leftrightarrow f'(x)$ 遞增 $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$
- (2) 當 $f(x)$ 在開區間 (a, b) 上的圖形為凹口向下 $\Leftrightarrow f'(x)$ 遞減 $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$
- (3) 當 $f(x)$ 之圖形在 $x=a$ 的左右兩側凹向性相反，則稱 $(a, f(a))$ 為 $f(x)$ 的反曲點。
此時 $f''(a) = 0$

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $y = f(x)$ 是一個實係數四次多項式，其函數圖形在 $(-1, 2)$ 和 $(1, 2)$ 各有一個反曲點，且知在 $(-1, 2)$ 和 $(1, 2)$ 此函數圖形切線的斜率分別為 1 和 -1，則下列哪些選項是正確的？
- (1) $x+1$ 是 $f''(x)$ 的因式
 - (2) $f'(x)$ 的常數項不等於零
 - (3) $f'(-x) = -f'(x)$
 - (4) $f(x)$ 首項係數是 1 [98 數甲]

答：(1)(3)

2. 考慮坐標平面上函數 $y = x^3 + 2x + 3$ 的圖形 (x 為任意實數)。
- 試問下列哪些選項是正確的？
- (1) 圖形有最高點，也有最低點
 - (2) 圖形有水平切線
 - (3) 圖形與任一水平直線恰有一交點
 - (4) 若 (a, b) 在圖形上，則 $(-a, -b+6)$ 也在圖形上
 - (5) 圖形與三直線 $x=0$ 、 $x=1$ 、 $y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4 [96 數甲]

答：(3)(4)(5)

3. 已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：
- 當 $x < 0$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) > 0$ ；
- 當 $0 < x < 1$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) < 0$ ；
- 當 $1 < x < 4$ 時， $f'(x) < 0$ 且 $f''(x) > 0$ ；
- 當 $x > 4$ 時， $f'(x) > 0$ 且 $f''(x) > 0$ 。請選出正確的選項：
- (1) $f'(2) > f'(3)$
 - (2) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值
 - (3) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點
 - (4) n 可能為 3
 - (5) $f(x)$ 的最高次項係數必為正。 [101 數甲]

答：(2)(5)

例題篇：知來之對策

1. 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -5$ ，且 $f(x)$ 圖形的反曲點為 $(2, -6)$ ，試求出此多項式 $f(x)$ 。

2. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有水平切線，且 $(1, 2)$ 為其反曲點，又 $f(2)=3$ ，求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 三次實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，已知 $(0, 1)$ 為 $y = f(x)$ 的反曲點，又過 $(0, 1)$ 的切線為 $x + y = 1$ ，則 $b - c + d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 設 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ， $y = f(x)$ 的圖形如右，且已知過點 $P(0, d)$ 作曲線 $y = f(x)$ 的切線為一水平線，求序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

