

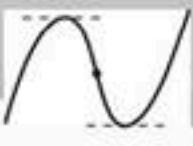
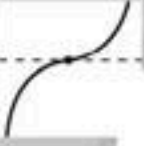




俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 80 天 : 圖形描繪、根的判斷

觀念篇

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$$

$f'(x)=0$ 有兩相異實根	$f'(x)=0$ 有兩相等實根	$f'(x)=0$ 無實根
		
		
1. 有波峰 (極大值) 及波谷 (極小值) 2. $f'(x)=0$ 兩根分別為波峰及波谷的 x 坐標	1. 沒有波峰、波谷。 2. 反曲點的切線為水平線	1. 沒有波峰、波谷。 2. 反曲點的切線非水平線

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮三次多項式 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ ，試回答下列問題。
- (1) 坐標平面上，試描繪 $y = f(x)$ 的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。(4分)
- (2) 令 $f(x) = 0$ 的實根為 a_1, a_2, a_3 ，其中 $a_1 < a_2 < a_3$ 。
試求 a_1, a_2, a_3 分別在哪兩個相鄰整數之間。(2分)
- (3) 承(2)，試說明 $f(x) = a_1, f(x) = a_2, f(x) = a_3$ 各有幾個相異實根。(4分)
- (4) 試求 $f(f(x)) = 0$ 有幾個相異實根(註： $f(f(x)) = -(f(x))^3 - 3(f(x))^2 + 3$)。(2分) 【107 數甲】

答：(2) a_1 於 -3, -2 之間， a_2 於 -2, -1 之間， a_3 於 0, 1 之間 (3) 1 個；1 個；3 個 (4) 5 個

2. 設 f 為實係數三次多項式函數。
 已知五個方程式的相異實根個數如下表所述：關於 f 的極小值 α ，試問下列哪一個選項是正確的
 (1) α 不存在 (2) $-20 < \alpha < -10$
 (3) $-10 < \alpha < 0$ (4) $0 < \alpha < 10$
 (5) $10 < \alpha < 20$ [100 數甲]

方程式	相異實根的個數
$f(x) - 20 = 0$	1
$f(x) - 10 = 0$	3
$f(x) = 0$	3
$f(x) + 10 = 0$	1
$f(x) + 20 = 0$	1

答：(3)

3. 設 $f'(x)$ 表示實係數多項式函數 $f(x)$ 的導函數。
 已知 $y = f'(x)$ 的圖形是一個通過點 $(1, 0)$ 和點 $(2, 0)$ 且開口向上的拋物線。
 試問下列哪些選項是正確的？
 (1) $f(x)$ 一定是三次多項式 (2) $f(x)$ 在 $1 < x < 2$ 的範圍內必為遞增
 (3) $f(x)$ 一定恰有兩個極值 (4) $f(x) = 0$ 一定有三個實根
 (5) $f(x) = 0$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 的範圍內一定有實根 [97 數甲]

答：(1)(3)

4. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。
 已知 $y = f(x)$ 的圖形和直線 $y = g(x)$ 在 $x = 1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。
 試選出正確的選項。
 (1) $f(1) = g(1)$ (2) $f'(1) = g'(1)$ (3) $f''(1) = 0$
 (4) 存在實數 $a \neq 1$ 使得 $f'(a) = g'(a)$ (5) 存在實數 $a \neq 1$ 使得 $f''(a) = g''(a)$

[106 數甲]

答：(1)(2)(3)

例題篇：知來之對策

1. 已知： $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - \frac{16}{3} \sin^2 \theta = 0$ 有三個相異正根，又 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。
 試求： θ 的範圍。

2. 已知 a 、 b 、 c 為相異實數，且 $a + b + c = 1$ 、 $ab + bc + ca = \frac{1}{4}$ 、 $abc = k$ 。
 試求： k 之範圍

3. 就 a 值決定 $f(x) = ax^3 - x + a = 0$ 的相異實根個數。

4. 若四次函數 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 的圖形如右，則：
 (1) $a < 0$ (2) $b < 0$ (3) $c < 0$ (4) $d < 0$
 (5) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$ 有三個相異實根。

