俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

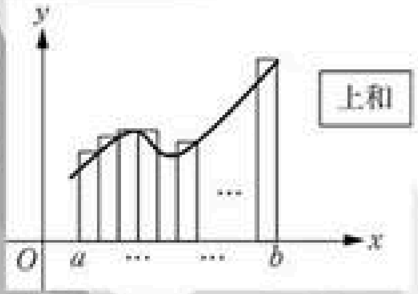
俞克斌老師編寫

倒數 78 天：黎曼和、微積分基本定理

觀念篇

已知 $f(x)$ 為閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數，且 $f(x)\geq 0$，

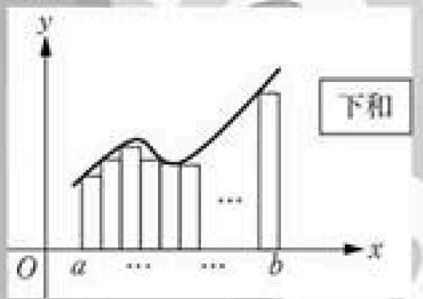
將區間 $[a,b]$ 分成 n 等分，每等分的間隔 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$



(1) 上和：以每等分區間中函數的最大值 M_i 為高，

作出 n 個矩形面積和 $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\times\Delta x$，

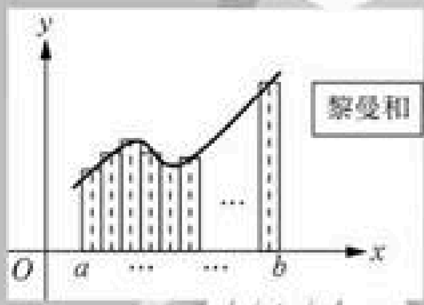
稱為區域面積的上和。



(2) 下和：以每等分區間中函數的最小值 m_i 為高，

作出 n 個矩形面積和 $L_n=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\times\Delta x$，

稱為區域面積的下和。



(3) 黎曼和：以每等分區間中的任一函數值 $f(t_i)$ 為高，

作出 n 個矩形面積和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\times\Delta x$，

稱為區域面積的黎曼和。

(4) 區域真實面積與上和 U_n、下和 L_n 及黎曼和關係：

(i) $L_n\leq\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\times\Delta x\leq U_n$

(ii) $L_n\leq$ 真實面積 $\leq U_n$

(iii) 當 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數，而 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}U_n$ 存在且相等時：

$$\text{真實面積 } \lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\times\Delta x$$

定積分：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數，則黎曼和的極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\times\Delta x$，

稱為函數 $f(x)$ 在 $f(x)$ 上的定積分，以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示。

其中 a 與 b 稱為此定積分的下限與上限。

微積分基本定理 I：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數，而 $F(x)$ 為區間 (a,b) 上的可微分函數，

若 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，$a<x<b$，則 $F'(x)=f(x)$。

微積分基本定理 II：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，

若 $G'(x)=f(x)$，即 $G(x)$ 為 $f(x)$ 的其中一個反導函數，

則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx=G(x)\Big|_a^b=G(b)-G(a)$

例題篇：鑑往之傾向

1. 令 $f(x)=x(x-1)\left(x^3-2\right)$，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x)\,dx=0$？

 (1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個。【101 數甲】

$\boxed{\text{答}}$：(3)

2. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=1$ 有極大值 3，

 且圖形 $y=f(x)$ 在 $(4,f(4))$ 之切線方程式為 $y-f(4)+5(x-4)=0$，

 試問 $\int_1^4 f''(x)\,dx$ 之值為下列哪一選項？

 (1) -5　(2) -3　(3) 0　(4) 3　(5) 5　【106 數甲】

$\boxed{\text{答}}$：(1)

例題篇：知來之對策

1. 欲求曲線 $y=4-x^2$ 與 $y=0$、$x=1$、$x=2$ 所圍成之區域 R 的面積，

 我們將區間 $[1,2]$ 分割成 n 等分（$n\in N$），

 求出區域 R 的下和為 $a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}$，則序組 $(a,b,c)=$ ________。

2. 由 $f(x)=x^2+1$ 的圖形、x 軸與兩直線 $x=0$、$x=2$ 所圍成的區域為 S，

 將閉區間 $[0,2]$ n 等分，求 S 的面積上和 U_n 為何？