

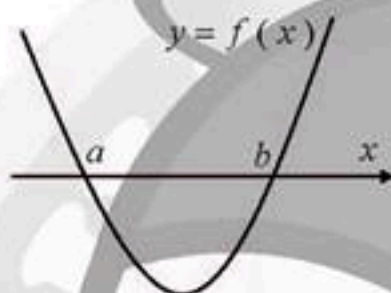
# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 77 天 : 面積(1)

### 觀念篇

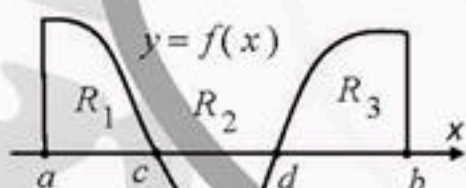
面積與積分觀念辨正：



在區間  $[a, b]$  中，

曲線與軸所圍面積為  $\int_a^b [-f(x)] dx$

特別注意



$$\int_a^b f(x) dx$$

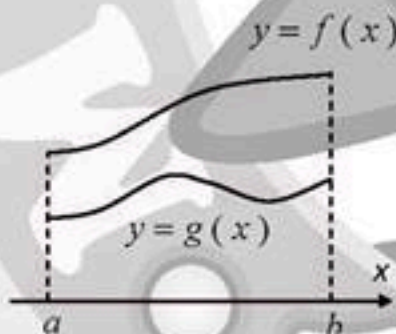
$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

特別注意

曲線與軸所圍面積

$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^d [-f(x)] dx + \int_d^b f(x) dx$$

特別注意



在區間  $[a, b]$  中， $f(x) \geq g(x) \geq 0$

兩曲線間面積為  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 設  $f(x) = -x^2 + 499$ ，且

$$A = \int_0^{10} f(x) dx, \quad B = \sum_{n=0}^9 f(n), \quad C = \sum_{n=1}^{10} f(n), \quad D = \sum_{n=0}^9 \frac{f(n) + f(n+1)}{2}$$

試選出正確的選項：

(1)  $A$  表示在坐標平面上函數  $y = -x^2 + 499$  的圖形與直線  $y = 0$ 、 $x = 0$ 、 $x = 10$  所圍成的有界區域的面積

(2)  $B < C$  (3)  $B < A$  (4)  $C < D$  (5)  $A < D$ 。

【107 數甲】

答：(1)(4)

2. 已知實係數三次多項式函數  $y=f(x)$  的最高次項係數為 12，  
其圖形與水平線  $y=25$  交於相異的三點  $(0,25)$ 、 $(1,25)$  及  $(2,25)$ 。  
(1) 試求曲線  $y=f(x)$  圖形上的反曲點座標  
(2) 試求定積分  $\int_0^2 f(x)dx$  之值 【100 數甲】

答：(1)  $(1,25)$  (2) 50

3. 在座標平面上以  $\Omega$  表曲線  $y=x-x^2$  與直線  $y=0$  所圍的有界區域。  
(1) 試求  $\Omega$  的面積。  
(2) 若直線  $y=cx$  將  $\Omega$  分成面積相等的兩塊區域，試求  $c$  之值。 【103 數甲】

答：(1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4. 設四次多項式  $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$   
(1) 選取積分區間  $a \leq x \leq b$ ，使得定積分  $\int_a^b f(x)dx$  達到最大值，並求此最大值；  
(2) 設  $c > 0$ ，求證  $\int_{-c}^c f(x)dx$  恆為負值 【98 數甲】

答：(1)  $0 \leq x \leq 1$ ，最大值  $\frac{13}{60}$

### 例題篇：知來之對策

1. 設曲線  $f(x)=2x^3-7x^2+5x$ ，在直線  $x=0$ 、 $x=a$  間 ( $a > 0$ )，與  $x$  軸所圍成的區域為  $R$ ，當區域  $R$  中  $x$  軸上方的面積等於  $x$  軸下方的面積時， $a=$ \_\_\_\_\_。
2. 設拋物線  $\Gamma: y=x^2-ax+a$  與  $x$  軸交於  $(p,0)$  與  $(q,0)$  兩點，其中  $0 < p < q$ 。  
 $\Gamma$  在第一象限與  $x$  軸、 $y$  軸所夾區域的面積為  $\alpha$ ， $\Gamma$  在第四象限與  $x$  軸所夾區域的面積為  $\beta$ ，若  $\alpha = \beta$ ，求  $(q,a)$ 。